This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

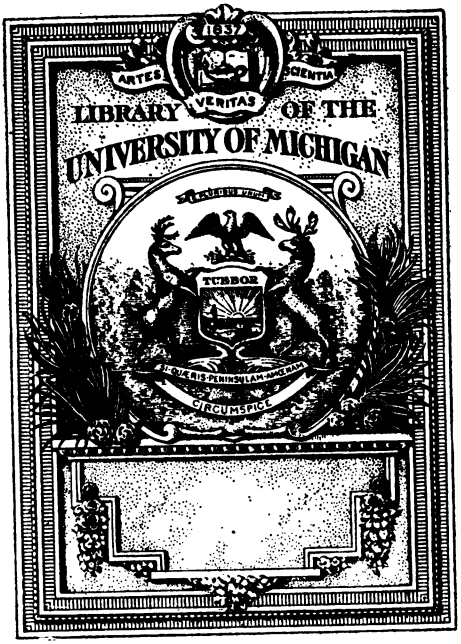
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

TA
350
S31

Bisher sind erschienen

zur Technik und mechanischen Industrie:

Geschichte und Grundlagen der Technik.

Am sausenden Webstuhl der Zeit. Übersicht über die Wirkungen der Naturwissenschaft und Technik auf das gesamte Kulturleben. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. W. Launhardt. 3. Aufl. Mit 3 Abbildungen. (Bd. 23.)

Schöpfungen der Ingenieurtechnik der Neuzeit. Von Geh. Reg.-Rat M. Geitel. Mit 32 Abbildungen. (Bd. 28.)

Einführung in das Studium der Technik. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. H. Lorenz. (Bd. 729.)

Mechanik.

***Mechanik.** Von Prof. Dr. G. Hamel. I. Grundbegriffe der Mechanik. II. Mechanik der festen Körper. III. Mechanik der flüssigen und luftförmigen Körper. (Bd. 684/686.)

Aufgaben aus der technischen Mechanik. Für den Schul- und Selbstunterricht. Von Prof. A. Schmitt. I. Bewegungslehre. Statik. 156 Aufgaben u. Lösungen mit zahlreichen Fig. im Text. II. Dynamik. 140 Aufgaben u. Lösungen mit zahlr. Fig. im Text. (Bd. 558/559.)

Statik. Mit Einschluß der Festigkeitslehre. Von Baugewerkschuldirektor Reg.-Baumeister A. Schau. Mit 149 Fig. (Bd. 497.)

Einführung in die technische Wärmelehre (Thermodynamik). Von Geh. Bergrat Prof. A. Vater. Mit 40 Abb. im Text. (Bd. 516.)

Praktische Thermodynamik. Aufgaben und Beispiele zur technischen Wärmelehre. Von Geh. Bergrat Prof. A. Vater. Mit 40 Abb. im Text u. 2 Tafeln. (Bd. 596.)

Das Perpetuum mobile. Von Dr. Fr. Schak. Mit 26 Abb. (Bd. 462.)

Bergbau, Hüttenwesen und mechanische Technologie.

Unsere Kohlen. Von Bergassessor P. Kukuk. Mit 60 Abb. u. 2 Taf. (Bd. 396.)

Die Metalle. Von Prof. Dr. K. Scheid. 2. Aufl. Mit 11 Abb. (Bd. 29.)

Das Eisenhüttenwesen. Von Geh. Bergrat Prof. Dr. H. Wedding. 5. Aufl. von Bergassessor F. W. Wedding. Mit 22 Abb. (Bd. 20.)

Maschinenelemente. Von Geh. Bergrat Professor A. Vater. 2. Aufl. Mit 175 Abbildungen. (Bd. 301.)

Hebezeuge. Hilfsmittel zum Heben fester, flüssiger und gasförmiger Körper. Von Geh. Bergrat Prof. A. Vater. 2. Aufl. Mit 67 Abb. im Text. (Bd. 196.)

Das Holz, seine Bearbeitung u. seine Verwendung. Von J. Großmann, Inspektor der Lehrwerkstätten für Holzbearbeitung in München. Mit 39 Originalabb. im Text. (Bd. 479.)

Die Spinnerei. Von Direktor Prof. M. Lehmann. Mit 35 Abbildungen. (Bd. 338.)

Die Kälte, ihr Wesen, ihre Erzeugung und Verwertung. Von Dr. H. Alt. Mit 45 Abbildungen. (Bd. 311.)

Maschinenlehre.

Industrielle Feuerungsanlagen und Dampfkessel. Von Ingenieur J. E. Mayer. Mit 88 Abbildungen. (Bd. 348.)

Die Dampfmaschine. Von Geh. Bergrat Prof. A. Vater. 2 Bde. I. Bd.: Wirkungsweise des Dampfes in Kessel und Maschine. 4. Aufl. Mit 97 Abb. II. Bd.: Ihre Gestaltung und ihre Verwendung. 2. Aufl. Mit 105 Abb. (Bd. 393/394.)

Die neueren Wärmekraftmaschinen. Von Geh. Bergrat Prof. A. Vater. 2 Bände. I. Bd.: Einführung in die Theorie und den Bau der Gasmaschinen. 3. Aufl. M. 41 Abb. (Bd. 21.) II. Bd.: Gaserzeuger, Großgasmaschinen, Gas- u. Dampfturbinen. 4. Auflage. Mit 43 Abbildungen. (Bd. 86.)

Die Wasserkraftmaschinen und die Ausnützung der Wasserkräfte. Von Geh. Reg.-Rat A. v. Ihering. 2. Aufl. Mit 57 Abb. (Bd. 228.)

Landwirtschaftliche Maschinenkunde. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. G. Fischer. Mit 64 Abbildungen. 2. Auflage. (Bd. 316.)

Elektrotechnik.

Grundlagen d. Elektrotechnik. V. Obering. A. Kotth. 2. Aufl. M. 74 Abb. (Bd. 391.)

Die elektrische Kraftübertragung. Von Ing. P. Köhn. 2. Aufl. Mit 133 Abb. (Bd. 424.)

Drähte und Kabel, ihre Anfertigung und Anwendung in der Elektrotechnik. Von Oberpostinsp. H. Brick. 2. Aufl. Mit 43 Abb. (Bd. 285.)

Die Telegraphen- und Fernsprechtechnik in ihrer Entwicklung. Von Oberpost-Insp. H. Brick. 2. Aufl. Mit 65 Abb. (Bd. 235.)

Das Telegraphen- und Fernsprechwesen. 2. Aufl. Von Oberpostrat Otto Sieblist. Mit Fig. (Bd. 183.)

Die Funkentelegraphie. Von Telegr.-Insp. H. Thurn. 5. Aufl. Mit 51 Abb. (Bd. 167.)

Hausbau und -einrichtung.

Der Eisenbetonbau. Von Dipl.-Ing. E. Haimovici. 2. Aufl. Mit 82 Abbildungen im Text sowie 8 Rechnungsbeispielen. (Bd. 275.)

Heizung und Lüftung. Von Ingenieur J. E. Mayer. Mit 40 Abbild. (Bd. 241.)

Das Beleuchtungswesen. Von Ing. Dr. H. Lux. M. 54 Abb. (Bd. 439.)

Verkehrstechnik.

Das Eisenbahnwesen. Von Eisenbahnbau- und Betriebsinspektor a. D. Dr.-Ing. E. Biedermann. 3., verb. Aufl. Mit 62 Abbildungen. (Bd. 144.)

Die Klein- und Straßenbahnen. V. Oberlehrer A. Liebmann. M. 85 Abb. (Bd. 322.)

Das Automobil. Eine Einführung in den Bau des heutigen Personen-Kraftwagens. Von Oberingenieur u. Automobil-Prüfungs-Kommissär bei der n.-ö. Statthalterei K. Blau. 3., überarbeitete Auflage. Mit 98 Abb. u. 1 Titelbild. (Bd. 166.)

Die Luftfahrt, ihre wissenschaftlichen Grundlagen und ihre technische Entwicklung. Von Dr. A. Nimführ. 3. Auflage von Dr. F. Huth. Mit 60 Abbildungen. (Bd. 300.)

Nautik. Von Direktor Dr. J. Möller. 2. Aufl. Mit zahlr. Abbildungen. (Bd. 255.)

Kriegstechnik.

Die Handfeuerwaffen. Ihre Entwicklung und Technik. Von Major R. Weiß. Mit 69 Abbildungen. (Bd. 364.)

Unsere Kriegsschiffe. Ihre Entstehung und Verwendung. Von Geh. Marinebaurat a. D. E. Krieger. 2. Aufl. von Marinebaurat Friedr. Schürer. Mit 62 Abb. (Bd. 389.)

Graphische und Fein-Industrie.

Wie ein Buch entsteht. Von Professor R. W. Unger. 4. Aufl. Mit 7 Tafeln und 26 Abbildungen im Text. (Bd. 175.)

Die Schmucksteine und die Schmuckstein-Industrie. Von Dr. A. Eppler. Mit 64 Abbildungen. (Bd. 376.)

Die Uhr. Grundlagen und Technik der Zeitmessung. Von Prof. Dr.-Ing. H. Bock. 2., umgearbeitete Auflage. Mit 55 Abbildungen im Text. (Bd. 216.)

Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen. Von Reg.-Rat Dipl.-Ing. K. Lenz. Mit 43 Abbildungen. (Bd. 490.)

Zeichnen.

Der Weg zur Zeichenkunst. Von Dr. E. Weber. 2. Aufl. Mit 81 Abbildungen und 1 farbigen Tafel. (Bd. 430.)

Geometrisches Zeichnen. Von akad. Zeichenlehrer A. Schudeisky. Mit Fig. (Bd. 568.)

Technisches Zeichnen. Von Reg.- u. Gewerbeschulrat Prof. K. Horstmann. (Bd. 548.)

Projektionslehre. Die rechtwinklige Parallelprojektion und ihre Anwendung auf die Darstellung technischer Gebilde nebst Anhang über die schiefwinklige Parallelprojektion in kurzer leichtfaßlicher Darstellung für Selbstunterricht und Schulgebrauch. Von akad. Zeichenlehrer A. Schudeisky. Mit 164 Figuren im Text. (Bd. 564.)

Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. V. Prof. Dr. K. Doehlemann. Mit 91 Fig. u. 11 Abb. (Bd. 510.)

Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)

Die mit * bezeichneten und weitere Bände befinden sich in Vorbereitung.

5651

Alexander Ziwet

Aus Natur und Geisteswelt
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen

497. Bändchen

Statik

mit Einschluß der

Festigkeitslehre

Von

Regierungsbaumeister A. Schau
Kgl. Baugewerkschuldirektor in Essen

Mit 149 Figuren im Text

Ziwet.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1915
Printed in Germany

Schutzformel für die Vereinigten Staaten von Amerika:
Copyright 1915 by B. G. Teubner in Leipzig.

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten.

Gift
Zimt
11-3-27.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt: Statik.

Seite

A. Einleitung 1
I. Allgemeines 1
II. Die wichtigsten physikalischen Grundgesetze 4
a) Gesetz der Trägheit . . . 4
b) Gesetz der Gegenwirkung 4
III. Rechnerisches und zeichnerisches Verfahren bei Untersuchung von Baukonstruktionen 5
B. Zusammensetzung, Zerlegung und Gleichgewicht von Kräften . . 5
I. Allgemeines 5
a) Die Bestimmungsteile einer Kraft. Einzelkräfte . . . 5
b) Mittelkraft und Seitenkräfte 6
c) Gleichgewicht der Kräfte . 7
II. Kräfte, welche in derselben Geraden wirken 7
III. Kräfte verschiedener Richtung mit gemeinsamem Angriffspunkt 9
a) Zwei Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt . . 9
b) Beliebig viele Kräfte mit gemeinsam. Angriffspunkt 13
IV. Kräfte verschiedener Richtung mit verschiedenen Angriffspunkten 15
a) Die Kraftrichtungen schneiden sich 15
b) Die Kraftrichtungen schneiden sich nicht (parallele Kräfte) 20
V. Anwendung auf einfache Stabkonstruktionen 23
a) Allgemeines. Knotenpunkte 23
b) Konsolträger 24
c) Das einfache Hängewerk . 28
d) Der doppelt armierte Träger 28
VI. Das statische Moment der Kräfte. Momentensatz . . . 28
a) Der Begriff des statischen Momentes 28
b) Bestimmung d. Lage d. Mittelkraft einer Kräftegruppe auf rechnerischem Wege. Anwendung d. Momentensatzes 30
c) Besondere Fälle 33
d) Standsicherheit 35
VII. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen 37
a) Rechnerische Bedingungen 37
b) Zeichnerische Bedingungen 37
C. Die Anwendung der statischen Gesetze auf die Baukonstruktionen . . 37
I. Allgemeines über Träger und deren Auflagerung 37
II. Die Bestimmung der Auflagerdrücke, des Biegungsmomentes und der Querkräfte eines Trägers auf zwei Stützen mit einer oder mehreren Einzellasten 40
III. Träger auf zwei Stützen mit gleichmäßiger Belastung . . 51
IV. Träger auf zwei Stützen mit Streckenlasten 55
V. Träger auf zwei Stützen mit gemischter Belastung . . . 55
VI. Durchgehende (kontinuierliche) Träger 59
VII. Anwendungen auf einfache Maschinen 59

Zweiter Abschnitt: Festigkeitslehre.

A. Einleitung 61
I. Allgemeines 61
II. Die verschiedenen Festigkeitsarten 62

Seite

B. Zug- und Druckfestigkeit 63
I. Allgemeines 63
II. Zugfestigkeit 66
III Druckfestigkeit 68
C. Schub- und Scherfestigkeit 73
I. Allgemeines 73
II. Berechnung von Niet-, Schrauben- und Bolzenverbindungen 74
a) Allgemeines 74
b) Einschnittige Nietverbindungen 75
c) Zweischnittige Nietverbindungen 76
d) Berechnung d. Nietabstandes 76
D. Biegungsfestigkeit. . . 78
I. Allgemeines. Trägheitsmoment. Die allgemeine Biegungsgleichung 78
II. Bestimmung der Trägheitsmomente 82
a) Trägheitsmoment für rechteckigen Querschnitt . . . 82
b) Bestimmung des Trägheitsmomentes ein. Querschnittes in bezug auf eine zur Schwerachse parallele Achse . . 83
c) Hauptträgheitsmomente . 84
d) Beispiele 84
III. Trägerberechnungen. . . 86
a) Allgemeines 86
b) Träger auf zwei Stützen mit Einzellasten 87
c) Träger auf zwei Stützen mit gleichmäßig verteilter Belastung 89
d) Träger auf zwei Stützen mit Streckenbelastung . . 90
e) Träger auf zwei Stützen mit gemischter Belastung . 92
f) Kappenträger 92
g) Der Frei- oder Kragträger 93
h) Träger mit überragenden Enden 96
i) Berechnung von Auflagerplatten 98

Seite

E. Torsionsfestigkeit . . 100
F. Knickfestigkeit 101
I. Allgemeines und Rechnungsgang 101
II. Anwendungen 102
G. Zusammengesetzte Festigkeit 105
I. Doppelbiegung 105
II. Druck und Biegung. . . 107
III. Zug und Biegung . . . 108
H. Exzentrischer Druck . . 110
I. Rechnungsgang 110
II. Anwendungen 114
I. Untersuchung von Gewölben und Widerlagern 117
I. Allgemeines 117
II. Unbelastete Gewölbe . . 118
III. Gewölbe mit Überschüttung 122
IV. Gewölbe mit Überschüttung und Belastung . . . 123
V. Unsymmetrisch belastete Gewölbe 125
VI. Untersuchung von Gewölbepfeilern 127
VII. Untersuchung der Widerlager 128
K. Die Berechnung größerer Dachkonstruktionen 129
I. Allgemeines 129
II. Ermittelung der Spannungen und Querschnitte . 131
L. Der Erddruck 136
I. Allgemeines 136
II. Die Ermittelung der Größe des Erddruckes 136
M. Der Wasserdruck . . . 140
I. Wasserdruck bei lotrechter Rückwand 140
II. Wasserdruck bei geneigter Rückwand 140
III. Wasserdruck bei gebrochener Rückwand 141
IV. Beispiel 142

Erster Abschnitt.

Statik.

A. Einleitung.

1. Allgemeines.

Überall in der Natur, im täglichen Leben, vor allem aber in sämtlichen Zweigen der Technik begegnen wir Erscheinungen, deren Ursachen unserem Auge häufig verborgen sind.

So bieten uns z. B. die Bewegungen der Erde um ihre Achse, bzw. um die Sonne, wie überhaupt die Bewegungen der Gestirne geheimnisvolle Vorgänge, welche z. T. überhaupt nicht unmittelbar wahrgenommen werden können, deren Vorhandensein aber aus anderen Erscheinungen geschlossen werden muß. Oft werden Änderungen in der Form oder in der Bewegung eines Gegenstandes beobachtet, ohne daß man bemerkt, welche Ursache dafür vorhanden ist. Die Ursache irgendeiner solchen Änderung oder irgendeiner Erscheinung nennen wir Kraft.

Schon an unserem eigenen Körper können wir entsprechende Beobachtungen machen. Gehen wir z. B. mit einer Last einen Berg hinan, so beugen wir uns nach vorn, bergab dagegen nach hinten. Wir können hieraus Schlüsse ziehen auf die Wirkung der Schwere unseres Körpers und die Notwendigkeit einer anderen Unterstützung seines Schwerpunktes als der, die beim Gehen auf ebener Erde vorhanden ist. Heben wir einen schweren Gegenstand, so tun wir dies nicht mit gestrecktem Arm, sondern wir ziehen den Arm an. Bei gestrecktem Arme würde ihn die Last leichter herabziehen, d. h. er würde sich um unser Schultergelenk drehen, und zwar um so leichter, je größer die Last ist. Die Ursache dieser Erscheinung ist ein wichtiges statisches Gesetz, welches wir immer wieder anzuwenden haben, nämlich das Gesetz vom statischen Moment, d. h. dem Produkte aus Kraft und Hebelarm. Wir erkennen dabei, daß ein Drehbestreben eintritt, welches um so größer ist, je größer die angreifende Kraft und je größer der Hebelarm ist.

Soll — um ein weiteres Beispiel unmittelbar aus der Technik anzuführen — zwischen den beiden Ufern eines Wasserlaufes eine Verbindung hergestellt werden, so genügt im einfachsten Falle hierfür ein Brett. Gehen wir über dieses, so bemerken wir, daß es sich durchbiegt, und zwar am stärksten, wenn wir uns in der Mitte befinden. Wir können hieran den Einfluß einer beweglichen Last (in diesem Falle unseres Gewichtes) auf einen Träger auf zwei Endstützen verfolgen, und erkennen weiter, daß bei Einwirkung einer Einzellast unter dieser das Brett am leichtesten brechen würde, daß also hier der gefährdetste Querschnitt liegt. Bei größerer Breite des Wasserlaufes würde das Brett allein nicht mehr genügen, es müßte daher durch Pfosten (Pfeiler) unterstützt werden, oder, falls dies nicht angängig wäre, durch Anwendung schräger, in den Ufern unterstützter Streben gesichert werden. Im letzteren Falle gelangen wir zur Anwendung einer Sprengwerkskonstruktion. Bei weiterer Verfolgung dieses Gedankens würden wir zu größeren Brückenkonstruktionen kommen.

Bei allen derartigen Bauwerken erkennen wir als Kräfte, welche das Bauwerk beanspruchen und bei ungenügender Konstruktion seine Zerstörung herbeiführen, neben dem Eigengewicht des Bauwerkes die Verkehrslast, also das Gewicht von Menschen, Tieren, Fahrzeugen aller Art und dgl., welche sich über die Brücke bewegen.

Doch gibt es auch noch andere Kräfte. Wir sehen, wie sich der Baum unter dem Winde biegt; wir beobachten, daß er beim Brechen stets in der Nähe der Wurzel knickt. Hier liegt also offenbar die gefährlichste Stelle, weshalb auch die Natur den Baum hier am stärksten gestaltet hat. Wir können hieraus die Nutzanwendung auf den an einer Seite eingespannten Freiträger ziehen und gleichzeitig darauf schließen, welchen Einfluß die Kraft des Windes auf hochragende Bauwerke, besonders auf Schornsteine, sowie auf steile Dächer, freistehende Mauern und dgl. hat.

Nimmt es da Wunder, wenn der Mensch bei der Beobachtung der Wirkungen der Kräfte in der Natur angespornt wurde, diese Kräfte näher zu studieren und seinen Diensten nutzbar zu machen, oder da, wo sie nachteilige Wirkungen ausüben, sie unschädlich zu machen oder wenigstens ihre üblen Folgen zu beseitigen?

Aus dem bisherigen erhellt die ganz besondere Wichtigkeit des Studiums der Kräfte für die Technik. In deren sämtlichen Zweigen spielen sie eine hervorragende Rolle. Jede technische Konstruktion muß so

beschaffen sein, daß sie imstande ist, die Wirkungen der Kräfte, welche sie beanspruchen, sicher aufzunehmen, so daß jede Änderung oder gar eine Zerstörung der Konstruktion ausgeschlossen ist.

Die oberste Bedingung für die Sicherheit einer technischen Konstruktion ist das Vorhandensein des Gleichgewichtes aller auf die Konstruktion einwirkenden Kräfte. Wir nennen die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte Statik. Eine weitere Lehre bildet die Dynamik, d. h. die Lehre von der Bewegung, auf welche in nachstehendem jedoch nicht eingegangen wird. Statik und Dynamik führen zusammen den Namen Mechanik.

Der Zweck der Statik ist daher die Untersuchung technischer Konstruktionen, bzw. einzelner ihrer Teile auf ihre Standsicherheit hin, welche dann gewährleistet ist, wenn Änderungen der Lage, der Gestalt und des Zusammenhanges der ganzen Konstruktion oder ihrer einzelnen Teile ausgeschlossen sind. Von ganz besonderer Wichtigkeit ist die Statik für die Konstruktionen des Hoch- und Tiefbaues.

Die wichtigsten für die letztgenannten Konstruktionen in Betracht kommenden Kräfte sind die Anziehungskraft der Erde (Schwerkraft), der Druck von Belastungen, welche ein Bauwerk erfährt oder selbst ausübt, der Druck von Erde, Wasser, Wind und Schnee. Die Schwerkraft verursacht die Bewegung aller ihrer Unterstützung beraubten Körper nach dem Mittelpunkte der Erde hin. Sie sucht stets zu wirken, aber auch von den anderen genannten Kräften wirken in der Regel mehrere gleichzeitig von außen auf ein Bauwerk ein. Man bezeichnet alle diese Kräfte als äußere oder angreifende Kräfte.

Heben sich die äußeren Kräfte in ihren Wirkungen gegenseitig auf, so befindet sich das Bauwerk, auf welches sie einwirken, im Zustande der Ruhe oder des Gleichgewichtes, womit nach obigem seine Standsicherheit gewährleistet ist. Doch ist damit sein dauernder Bestand noch nicht gesichert. Die äußeren Kräfte suchen nämlich eine Verschiebung der einzelnen Massenteilchen des Baukörpers herbeizuführen, welcher die Zusammenhangskraft (Kohäsion) desselben einen gewissen Widerstand entgegensetzt. Dadurch werden im Innern des Körpers Kraftwirkungen erzeugt, welche man innere (widerstehende) Kräfte oder Spannungen nennt. Sie dürfen eine gewisse Größe nicht überschreiten, wenn der Zusammenhang des Baukörpers und damit seine Dauer gewahrt bleiben soll. Die Ermittelung der inneren Kräfte und die Bestimmung der hiervon abhängigen Größenabmessungen eines

Bauwerkes bilden einen besonderen Zweig der Statik, welcher im zweiten Abschnitt dieses Buches, der **Festigkeitslehre** behandelt wird.

II. Die wichtigsten physikalischen Grundgesetze.

a) Das Gesetz der Trägheit. Sitzt man in einem Eisenbahnzuge, so erhält man bei dessen Anfahren einen Stoß nach rückwärts, beim Anhalten eines fahrenden Zuges dagegen einen Stoß nach vorwärts. Beim Abspringen von einem Straßenbahnwagen muß man, wenn man einen Fall vermeiden will, in der Richtung des fahrenden Wagens abspringen. Man sucht also in jedem Falle diejenige Lage beizubehalten, die man einmal hatte, und zwar im ersten Falle im Zustande der Ruhe, in den beiden anderen Fällen dagegen in dem Zustande der Bewegung zu verharren und wird erst durch die Einwirkung einer äußeren Kraft aus diesen Zuständen in die der Bewegung, bzw. der Ruhe übergeführt. Aus diesen Beispielen läßt sich das wichtige Gesetz der **Trägheit** oder des **Beharrungsvermögens** erkennen, welches lautet:

Jeder Körper sucht in dem Zustande der Ruhe oder Bewegung zu verharren, in welchem er sich gerade befindet, solange nicht äußere Kräfte eine Änderung dieses Zustandes herbeiführen.

Eine Kugel müßte z. B. auf ebener Unterlage, einmal in Bewegung versetzt, immer weiter in der eingeschlagenen Richtung rollen, wenn nicht die Reibung auf dieser Unterlage und der Luftwiderstand als äußere Kräfte ihre Bewegung verlangsamen und sie schließlich zum Stillstande bringen würden. — Auch die Bewegungen der Gestirne beruhen auf dem Gesetze der Trägheit.

b) Das Gesetz der Gegenwirkung. Schlägt man mit einer Hand auf die andere, so spürt man, daß nicht nur die geschlagene Hand einen Druck erhält, sondern auch die schlagende einen gleich großen. Zieht man eine Last vorwärts, so wird man gleichzeitig mit gleicher Kraft zu der Last hingezogen. Aus diesen Beispielen erkennt man ein weiteres, wichtiges Naturgesetz, das Gesetz der **Gegenwirkung**. Es lautet:

Die Kräfte treten in der Natur nie einzeln auf, sondern jede Kraft ruft eine Gegenkraft hervor, welche in derselben Geraden wirkt und gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung hat.

III. Rechnerisches und zeichnerisches Verfahren bei Untersuchung von Baukonstruktionen.

Die Untersuchung eines Bauwerkes kann auf rechnerischem oder zeichnerischem (graphischem) Wege erfolgen. Das rechnerische Verfahren ist genauer, aber meist umständlicher und daher zeitraubender, das zeichnerische in der Regel einfacher und übersichtlicher, aber etwas weniger genau, ein Nachteil, der jedoch häufig nicht ins Gewicht fällt. Derjenige Zweig der Statik, welcher die zeichnerische Lösung von Aufgaben umfaßt, heißt Graphostatik oder graphische Statik.

B. Zusammensetzung, Zerlegung und Gleichgewicht von Kräften.

I. Allgemeines.

a) Die Bestimmungsteile einer Kraft. Einzelkräfte. Die Kräfte unterscheidet man in bewegende (angreifende) Kräfte, wenn sie eine Bewegung oder eine Bewegungsänderung eines Körpers hervorrufen, und widerstehende Kräfte (Widerstände), wenn sie eine Bewegung verhindern, verringern oder aufheben. Bewegende Kräfte sind demnach u. a. die Schwerkraft, die Spannkraft des Dampfes, der Gase, die elektrische Kraft, die Muskelkraft von Menschen und Tieren, Widerstände dagegen die Reibung, der Luftwiderstand, die Festigkeit der Baustoffe. Widerstände wirken in der Regel nur solange, als die Bewegung oder die äußere Kraftwirkung, durch die sie hervorgerufen werden, andauert.

Um die Wirkung einer Kraft genau festlegen zu können, müssen folgende vier Bestimmungsteile bekannt sein:

1. Die Richtung der Kraft, d. h. diejenige Gerade, in welcher die Kraft wirkt und in der der Körper durch sie fortbewegt würde.

2. Der Angriffspunkt der Kraft, d. h. derjenige Punkt der Wirkungslinie, in welchem die Kraft von außen her auf den Körper trifft (Kenntlichmachung durch kleinen Kreis). In ihm kann man die Kraft wirkend annehmen. Der Angriffspunkt kann in der Richtung der Kraft beliebig verschoben werden, ohne daß die Wirkung der Kraft geändert würde. So ist z. B. die Dampfkraft einer Lokomotive am Zuge dieselbe, gleichviel ob sie den Zug zieht oder schiebt.

3. Der Sinn der Kraft, d. h. die Angabe, ob die Kraft in dem gleichen Abschnitt der Wirkungslinie von dem Angriffspunkt weg oder

auf ihn zu gerichtet ist. Beim zeichnerischen Verfahren erfolgt diese Angabe durch einen Pfeil auf der Wirkungslinie, beim rechnerischen durch das Vorzeichen + oder −.

4. Die Größe der Kraft. Die Wirkung jeder Kraft kann durch ein Gewicht dargestellt werden. Als Krafteinheit zur Bestimmung der Größe einer Kraft dient dementsprechend auch die Gewichtseinheit, also das Kilogramm (kg). Bei sehr großen Kräften, wie sie namentlich im Gebiete des Tiefbaues vorkommen, wählt man als Krafteinheit die Tonne (t = 1000 kg).

Zeichnerisch wird eine Kraft durch eine Strecke dargestellt. Hat man mehrere Kräfte darzustellen, so sind die sie darstellenden Strecken der Größe der Kräfte proportional. Zur Messung dient ein Kräftemaßstab z. B. 1 cm = 1000 kg, 1 cm = 5 t.

Eine Strecke von 5 cm würde darnach bei Wahl eines Kräftemaßstabes von 1 cm = 1000 kg eine Kraft von 5000 kg darstellen.

Welchen Maßstab man wählt, ist an sich gleichgültig, doch empfiehlt es sich, bei kleinen Kräften eine große Längeneinheit, bei großen Kräften eine kleine Längeneinheit für die Kräfte zugrunde zu legen.

Voraussetzung für alle in folgendem vorkommenden Untersuchungen ist, daß die auftretenden Kräfte nicht im Raume, sondern in einer Ebene wirken, welche mit der Zeichenebene zusammenfällt.

b) Mittelkraft und Seitenkräfte. Bewegen zwei Menschen eine Last fort, so kann dies gegebenenfalls auch durch einen einzigen Menschen geschehen, welcher natürlich eine ebenso große Kraft anwenden müßte, als zuvor die beiden zusammen. Was für die hier auftretenden Kräfte gilt, hat auch für alle anderen Kräfte Geltung.

Wirken also auf einen Körper mehrere Kräfte ein, so können diese durch eine einzige Kraft von gleicher Wirkung ersetzt werden. Man nennt diese Ersatzkraft die Mittelkraft, Resultierende oder Resultante; die Einzelkräfte, welche durch die Mittelkraft ersetzt werden, nennt man Seitenkräfte oder Komponenten. Die Mittelkraft hat also die gleiche statische Wirkung wie die Gruppe der Einzelkräfte. Die Bestimmung der Mittelkraft mit Hilfe der Einzelkräfte nennt man die Zusammensetzung von Kräften. Umgekehrt wird aber auch oft die Aufgabe gestellt, aus einer gegebenen Kraft als Mittelkraft die Seitenkräfte zu bestimmen, welche dieselbe Wirkung wie die Mittelkraft hervorrufen. Die Lösung einer solchen Aufgabe nennt man Zerlegung der Kräfte.

c) Gleichgewicht der Kräfte. Heben sich alle auf einen Körper wirkenden Kräfte in ihren Wirkungen gegenseitig auf, so befindet sich der Körper im Zustande des Gleichgewichtes. Die Mittelkraft hat dann natürlich den Wert Null, da bei jedem anderen Werte eine Bewegung des Körpers eintreten müßte.

II. Kräfte, welche in derselben Geraden wirken.

Wirken zwei Kräfte gleichen Sinnes in derselben Geraden, so ist ihre Mittelkraft gleich ihrer Summe. Bei der zeichnerischen Darstellung reiht man die beiden Kraftstrecken in ihrem Sinne aneinander an, so daß der Endpunkt der einen Kraft der Anfangspunkt der zweiten wird. Die Reihenfolge ist dabei beliebig. Die Mittelkraft R ist dann durch die Strecke vom Anfangspunkt A der ersten bis zum Endpunkt E der zweiten Kraft gegeben (Fig. 1).

Fig. 1.

Beispiel. Für die gegebenen Kräfte $P_1 = 30$ kg und $P_2 = 20$ kg, welche gleiche Richtung und gleichen Sinn haben, wird die Mittelkraft $R = P_1 + P_2 = 30 + 20 = 50$ kg. Im Kräftemaßstab 1 cm = 20 kg, ist $P_1 = 1{,}5$ cm und in ihrem Endpunkte $P_2 = 1{,}0$ cm aufzutragen. Dann wird die Strecke $AE = 2{,}5$ cm $= 2{,}5 \cdot 20 = 50$ kg $= R$ (Fig. 1).

Wirkt nun eine beliebige Anzahl von Kräften gleichen Sinnes in derselben Geraden, so kann man zunächst zwei derselben in der eben geschilderten Weise zu ihrer Mittelkraft R zusammensetzen, diese Mittelkraft mit der nächsten Einzelkraft zu einer neuen Mittelkraft R_2 und so fort, bis man schließlich als Mittelkraft sämtlicher Einzelkräfte die Summe aller Einzelkräfte erhält. Die zeichnerische Lösung erhält man, indem man jedesmal den Endpunkt einer Kraft zum Anfangspunkt der nächsten macht. Als Mittelkraft ergibt sich dann die Gesamtstrecke vom Anfangspunkt A der ersten bis zum Endpunkt E der letzten Kraft.

Beispiel. Gegeben die Kräfte $P_1 = 20$ kg, $P_2 = 10$ kg, $P_3 = 15$ kg, $P_4 = 25$ kg. Es wird $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 20 + 10 + 15 + 25 = 70$ kg. Fig. 2 zeigt die zeichnerische Lösung für den Kräftemaßstab 1 cm = 20 kg. Die Strecke AE, welche sich aus den Einzelstrecken $P_1 = 1{,}0$ cm, $P_2 = 0{,}5$ cm, $P_3 = 0{,}75$ cm, $P_4 = 1{,}25$ cm zusammensetzt, mißt 3,5 cm, also ist $R = 3{,}5 \cdot 20 = 70$ kg.

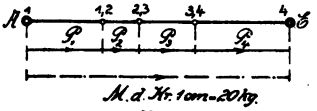


Fig. 2.

Aus diesen Beispielen folgt der Lehrsatz: **Die Mittelkraft beliebig vieler Kräfte, welche in derselben Geraden wirken und gleichen Sinn haben, ist gleich der Summe der Kräfte.**

Wirkt an einem Körper eine Zugkraft $P_1 = +50$ kg und im Angriffspunkt derselben noch eine zweite Zugkraft $P_2 = -20$ kg, welche also wohl in derselben Geraden wirkt, aber entgegengesetzten Sinn hat, so leuchtet ohne weiteres ein, daß eine Bewegung des Körpers wohl in der Richtung der größeren Kraft erfolgt, aber nur so, als ob eine Kraft von 30 kg wirken würde, da offenbar ein Teil in Höhe von 20 kg durch die kleinere Zugkraft aufgehoben wird. Die Mittelkraft R ergibt sich also als Unterschied der beiden Kräfte P_1 und P_2 und es wird $R = +P_1 - P_2 = +50 - 20 = +30$ kg. Das Vorzeichen + gibt hier an, daß die Kraftrichtung der Mittelkraft mit derjenigen der größeren Kraft zusammenfällt.

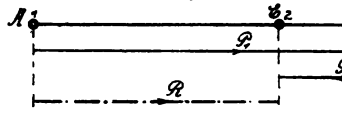


Fig. 3.

Bei der zeichnerischen Lösung (Fig. 3) trägt man die beiden Kräfte wieder so auf, daß der Anfangspunkt der einen mit dem Endpunkt der andern zusammenfällt, doch hat man den Sinn der beiden Kräfte genau zu beachten. Für den Kräftemaßstab 1 cm = 10 kg mißt man dann $R = 3{,}0$ cm $= 3{,}0 \cdot 10 = 30$ kg.

Lehrsatz. Die Mittelkraft zweier, in derselben Geraden wirkender Kräfte entgegengesetzten Sinnes ist gleich der Differenz der beiden Kräfte.

Ist $P_1 = P_2$, so ist ihre Mittelkraft offenbar gleich Null und es herrscht Gleichgewicht.

Wirken beliebig viele Kräfte entgegengesetzten Sinnes in derselben Geraden, so heben sich ihre Wirkungen teilweise oder ganz auf. Ihre Mittelkraft ist gleich der algebraischen Summe aller dieser Kräfte, wobei man alle nach der einen Seite wirkenden Kräfte mit +, die nach der anderen Seite wirkenden mit − bezeichnet.

Beispiel. Gegeben $P_1 = +20$ kg, $P_2 = +30$ kg, $P_3 = +10$ kg, $P_4 = -15$ kg, $P_5 = -20$ kg. Es wird $R = +P_1 + P_2 + P_3 - P_4 - P_5 = +20 + 30 + 10 - 15 - 20 = +25$ kg. Die zeichnerische Lösung zeigt Fig. 4. Sie braucht nach den bisherigen Erläuterungen wohl nicht näher erklärt zu werden.

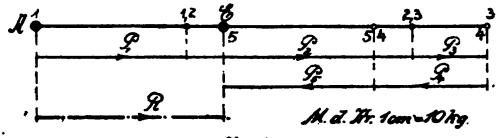


Fig. 4.

Zerlegung. Soll eine Kraft in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche in derselben Wirkungsgeraden liegen, so sind offenbar unendlich viele Lösungen möglich. Eine bestimmte Lösung ist nur dann vorhanden, wenn die eine der beiden Seitenkräfte gegeben ist. — Soll eine Kraft in n Seitenkräfte zerlegt werden, so müssen $n - 1$ Seitenkräfte nach Größe und Sinn gegeben sein.

Gleichgewicht. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich für den Zustand des Gleichgewichtes:

Zwei auf einen Körper wirkende Kräfte befinden sich im Gleichgewicht, wenn sie in derselben Geraden wirken, gleiche Größe und entgegengesetzten Sinn haben.

Beliebig viele auf einen Körper in einer Geraden wirkende Kräfte verschiedenen Sinnes sind im Gleichgewicht, wenn ihre algebraische Summe (und damit ihre Mittelkraft) gleich Null ist.

III. Kräfte verschiedener Richtung mit gemeinsamem Angriffspunkt.

a) Zwei Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt. 1. Zusammensetzung. Rudert man von einem Punkte des Ufers quer über einen Fluß, so gelangt man nicht an einem rechtwinklig gegenüberliegenden Punkte an das andere Ufer, sondern weiter flußabwärts, weil man durch die Kraft der Strömung aus der direkten Richtung abgetrieben wird. Will man aber in letzterer an das andere Ufer gelangen, so muß man mit entsprechend größerer Kraft gegen die Strömung, also flußauf rudern. In beiden Fällen wird das Boot eine Richtung einschlagen, welche mit der Diagonale des aus den beiden Bewegungsrichtungen konstruierten Parallelogrammes zusammenfällt (Fig. 5). Hieraus kann man unmittelbar die Nutzanwendung auf die Ermittelung der Mittelkraft zweier Kräfte verschiedener Richtung mit gemeinsamem Angriffspunkt ziehen. Es ist nämlich:

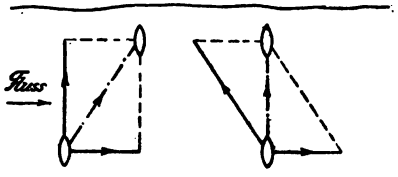


Fig. 5.

Die Mittelkraft zweier durch einen Punkt gehender Kräfte nach Richtung, Größe und Sinn gleich der vom Angriffspunkt ausgehenden Diagonale desjenigen Parallelogram-

mes, welches man aus den gegebenen Kräften als Seiten bilden kann. Der gegebene Punkt ist der Angriffspunkt der Mittelkraft, das Parallelogramm heißt Parallelogramm der Kräfte (Fig. 6).

Ist der Sinn der Kräfte nicht von vornherein vom Angriffspunkt weggerichtet, so muß man vor Zeichnung des Parallelogramms die eine der

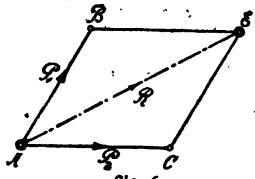


Fig. 6.

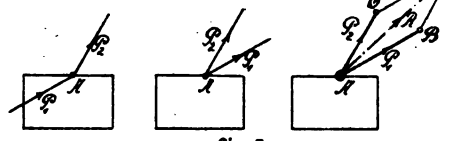


Fig. 7.

Kräfte so lange in ihrer Richtung verschieben, bis das der Fall ist (Fig. 7). Daß man dies ohneweiters tun kann, geht z. B. daraus hervor, daß eine Lokomotive, gleichviel ob sie am Anfange oder am Ende des Zuges steht, also gleichviel ob sie zieht oder schiebt, dieselbe Wirkung hervorruft.

Da die Diagonale eines Parallelogrammes dieses in zwei kongruente Dreiecke ABE und ACE (Fig. 6) zerlegt, und in jedem dieser Dreiecke die gegebenen Seitenkräfte und die Mittelkraft vorkommen, so genügt zur Bestimmung der letzteren die Zeichnung eines dieser Dreiecke. Man nennt es Kräftedreieck.

Das Kräftedreieck wird meist in einer besonderen Figur neben dem Körper gezeichnet (Fig. 8). Man wählt wieder einen Kräftemaßstab und trägt von einem beliebig angenommenen Punkte A die Kraft P_1 gleichlaufend zur gegebenen Richtung auf. Durch den Endpunkt B wird sodann eine Gleichlaufende zu P_2 gezogen und auf ihr P_2 von B aus derart abgetragen, daß die Pfeilrichtungen der Kräfte sich folgen. Die Verbindungslinie AE (Schlußlinie) gibt alsdann die gesuchte Mittelkraft R nach Richtung und Größe. Ihren Sinn erhält man durch Anbringung eines Pfeiles, welcher gegen die Pfeilrichtungen der gegebenen Kräfte läuft. Durch parallele Verschiebung von R nach dem Angriffspunkt erhält man auch ihre richtige Lage zum untersuchten Körper (Hauptfigur).

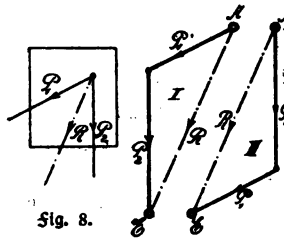


Fig. 8.

Man kann, wie das Kräftedreieck II zeigt (Fig. 8), auch mit P_2 beginnen und an sie P_1 antragen. Wieder wird $R = AE$. Die gebrochenen Linien ABE und ACE nennt man den Kräftezug und die bei Aneinanderreihung von Kräften durch die erste aufgetragene Kraft

bestimmte, vom Angriffspunkt weggerichtete Pfeilrichtung den Umfahrungssinn. Die Seitenkräfte im Kräftedreieck haben mithin stets den gleichen Umfahrungssinn, die Mittelkraft entgegengesetzten Umfahrungssinn.

Da das Kräftedreieck einfacher ist, so wird es häufiger angewendet als das Kräfteparallelogramm.

Rechnerisches Verfahren. Durch Zeichnung gelangt man in vorliegendem Falle in der Regel schneller und einfacher zum Ziele, so daß dieses Verfahren am häufigsten angewandt wird. Das rechnerische Verfahren soll daher nur für die folgenden beiden Sonderfälle gegeben werden.

A. Die Kräfte schließen einen rechten Winkel ein. Das Kräftedreieck wird rechtwinkelig (Fig. 9), mithin:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 \quad \text{und} \quad R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$$

oder: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{P_1}{P_2}$ $\qquad \beta = 90^\circ - \alpha$

$$\frac{P_1}{R} = \sin\alpha, \quad P_1 = R \cdot \sin\alpha$$

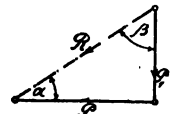


Fig. 9.

$$R = \frac{P_1}{\sin\alpha}$$

oder entsprechend zu finden: $R = \dfrac{P_2}{\cos\alpha}$.

Beispiel. Gegeben $P_1 = 30$ kg, $P_2 = 40$ kg. Gesucht R.

$$R = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50 \text{ kg}$$

oder: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{30}{40} = 0{,}7500$, woraus: $\alpha = 36^\circ 52'$

mithin: $R = \dfrac{30}{\sin 36^\circ 52'} = \dfrac{30}{0{,}6000} = 50$ kg

oder: $R = \dfrac{40}{\cos 36^\circ 52'} = \dfrac{40}{0{,}8000} = 50$ kg.

B. Die Kräfte P_1 und P_2 sind einander gleich. Das Kräftedreieck wird gleichschenkelig (Fig. 10) und $P_1 = P_2 = P$. Zieht man $CD \perp AE$, so wird $AD = \dfrac{R}{2}$. Der Kraftwinkel α wird durch AE halbiert, mithin ist:

$$\frac{AD}{AC} = \cos\frac{\alpha}{2}, \text{ also: } AD = AC \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

oder: $\dfrac{R}{2} = P \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$ und $R = 2P \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$.

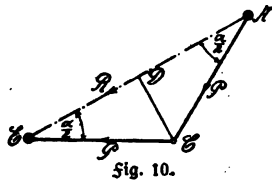


Fig. 10.

Beispiel. Gegeben $P = 1000$ kg, $\alpha = 40°$. Es wird:

$$R = 2 \cdot 1000 \cdot \cos\frac{40}{2} = 2000 \cdot \cos 20°$$

$$R = 2000 \cdot 0{,}9397 = 1879 \text{ kg}.$$

Wird $\alpha = 90°$, so wird das Kräftedreieck gleichschenkelig-rechtwinkelig, mithin: $R^2 = P_1^2 + P_2^2$ und da $P_1 = P_2 = P$

$$R^2 = 2P^2, \text{ also: } R = \sqrt{2P^2} \text{ oder: } R = P \cdot \sqrt{2}.$$

2. **Zerlegung.** Die Aufgabe, eine Kraft in zwei Seitenkräfte zu zerlegen, läßt unendlich viele Lösungen zu. Sie wird erst dann bestimmt, wenn entweder die Richtung jeder Seitenkraft oder eine der beiden Seitenkräfte nach Größe, Richtung und Sinn gegeben ist.

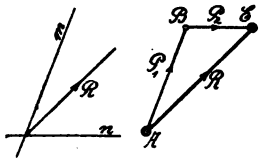


Fig. 11.

a) Gegeben R und die beiden Kraftrichtungen m und n der Seitenkräfte P_1 und P_2. Die Lösung erfolgt am einfachsten mit Hilfe des Kräftedreiecks (Fig. 11). Man trägt in einer Nebenfigur R nach Größe, Richtung und Sinn auf und zieht durch A eine Gleichlaufende zu der einen Kraftrichtung, durch E eine Gleichlaufende zur anderen Kraftrichtung (daher zwei Lösungen möglich). Die so gefundenen Dreiecksseiten geben nach Größe und Richtung die gesuchten Seitenkräfte P_1 und P_2, deren Umfahrungssinn dem von R entgegengesetzt ist.

b) Gegeben ist R und eine der Seitenkräfte nach Größe, Richtung und Sinn. Man trägt in der Nebenfigur nach den gegebenen Richtungen von R und der Seitenkraft $AE = R$ und $AB = P_1$ auf, und verbindet B mit E, so ist BE nach Größe und Richtung die gesuchte Seitenkraft P_2. P_2 hat denselben Umfahrungssinn wie P_1, aber entgegengesetzten wie R. Die Lage von P_2 wird durch Parallelverschiebung nach dem eigentlichen Angriffspunkt O gefunden.

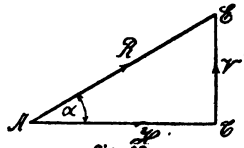


Fig. 12.

Rechnerische Lösung. Auch hier soll nur ein Sonderfall behandelt werden, da die zeichnerische Lösung in allen anderen Fällen rascher zum Ziele führt. Sehr häufig tritt der Fall ein, daß eine Kraft in zwei zueinander senkrechte Seitenkräfte zerlegt werden soll, wobei die Seitenkräfte in der Regel senkrecht und wagerecht gerichtet sind. Bezeichnet man, wie üblich, die senkrechte (vertikale) Seitenkraft mit V, die wagerechte (horizontale) Seitenkraft mit H, so wird nach Fig. 12

$$\frac{H}{R} = \cos\alpha, \text{ also: } H = R \cdot \cos\alpha \text{ und } \frac{V}{R} = \sin\alpha, \text{ also: } V = R \cdot \sin\alpha.$$

3. Gleichgewicht. Zwei Kräfte, welche an einem Punkte in verschiedener Richtung angreifen, können sich, wie ohne weiteres einleuchtet, nie das Gleichgewicht halten.

b) Beliebig viele Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt. 1. Zusammensetzung. Die Zusammensetzung beliebig vieler Kräfte erfolgt mit Hilfe wiederholter Anwendung des Kräfteparallelogramms oder einfacher des Kräftedreiecks. Am besten wird das letztere Verfahren an einem Beispiel gezeigt (Fig. 13).

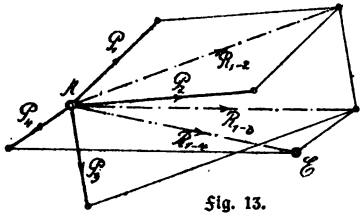


Fig. 13.

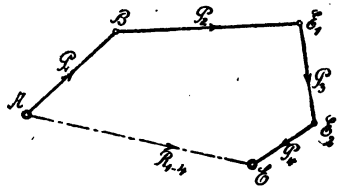


Fig. 14.

Beispiel. Gegeben seien die Kräfte $P_1 = 50$ kg, $P_2 = 100$ kg, $P_3 = 150$ kg, $P_4 = 70$ kg in den dargestellten Richtungen. Man setzt in der Nebenfigur zunächst P_1 und P_2 zur Mittelkraft R_{1-2} zusammen, sodann diese mit P_3 zu R_{1-3} und endlich letztere mit P_4 zu R_{1-4}, wodurch man $R_{1-4} = R$ erhält. Dieses Verfahren kann für beliebig viele Kräfte fortgesetzt werden.

Aus Fig. 14 erkennt man ohne weiteres, daß man zum gleichen Ziele gekommen wäre, wenn man unter Fortlassung der Zwischenmittelkräfte R_{1-2} und R_{1-3} die Einzelkräfte so aneinander gereiht hätte, daß der Endpunkt der ersten Kraft zugleich Anfangspunkt der zweiten, der Endpunkt der zweiten Anfangspunkt der dritten wird usf. Aus Fig. 15 erkennt man ferner, daß auch die Reihenfolge der Kräfte gleichgültig ist. Nur muß der Umfahrungssinn der aneinandergereihten Kräfte stets der gleiche sein, die erste Kraft muß vom Anfangspunkt weggerichtet sein. Die Mittelkraft erhält man, wenn man den Anfangs- und Endpunkt der aneinandergereihten Einzelkräfte (des Kräftezuges) miteinander verbindet. Der Sinn der Mittelkraft ist dem Sinne der Einzelkräfte entgegengesetzt. Die den Kräftezug schließende und die Mittelkraft darstellende Linie heißt Schlußlinie, das entstandene Vieleck A, B, E_1, E_2, E nennt man Kräftevieleck, Krafteck oder

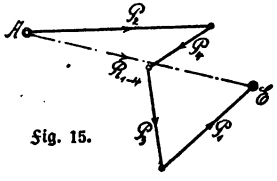


Fig. 15.

Kräftepolygon. Man erhält zur Bestimmung der Mittelkraft also den

Lehrsatz. Die Mittelkraft beliebig vieler in einem Punkte angreifender Kräfte ist nach Richtung, Größe und Sinn gleich der vom Anfangs- nach dem Endpunkte gezogenen Schlußlinie desjenigen Kräftezuges, dessen Seiten gleich und gleichlaufend den gegebenen Seitenkräften sind.

Durch Parallelverschiebung nach dem gemeinsamen Angriffspunkt O der Hauptfigur erhält man auch hier wieder die Lage der Mittelkraft.

Die rechnerische Lösung ist bedeutend umständlicher und daher auch zeitraubender, weshalb von ihr abgesehen werden soll. Man findet sie bei Schau, Statik. S. 19. (Verlag von B. G. Teubner, Leipzig.)

2. Zerlegung. Die Zerlegung einer Kraft in mehr als zwei Seitenkräfte soll nicht behandelt werden, weil sie zu selten vorkommt.

3. Gleichgewicht. Die Bewegung eines Punktes in fortschreitender Richtung kann offenbar unter dem Einfluß mehrerer Kräfte nur dann stattfinden, wenn diese Kräfte sich durch eine Mittelkraft ersetzen lassen. Ist dies nicht der Fall, ist also die Mittelkraft $R = 0$, so ist eine fortschreitende Bewegung ausgeschlossen, die Kräfte sind im Gleichgewicht. Dies tritt offenbar dann ein, wenn der Anfangspunkt und der Endpunkt des aus den Einzelkräften gezeichneten Kräftezuges zusammenfallen, denn dann wird die Mittelkraft $R = 0$. Man nennt in diesem Fall den Kräftezug **geschlossen**; die Kräfte haben alle **gleichen Umfahrungssinn**.

Bei drei im Gleichgewicht befindlichen Kräften ergibt sich demnach als Krafteck ein geschlossenes Kräftedreieck (Fig. 16), bei mehr als drei im Gleichgewicht befindlichen Kräften ein geschlossenes Vieleck (Fig. 17).

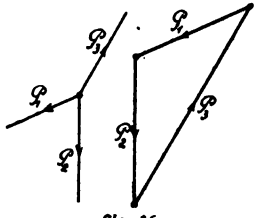


Fig. 16.

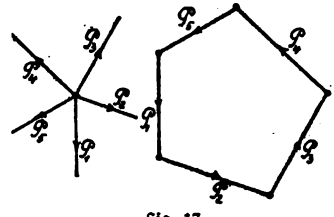


Fig. 17.

Man erhält also folgenden

Lehrsatz. Drei an einem Punkte angreifende Kräfte befinden sich im Gleichgewicht, wenn der aus ihnen gebildete

Kräftezug ein geschlossenes Kräftedreieck mit stetigem Umfahrungssinn ergibt; mehrere an einem Punkte angreifende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn der aus ihnen gebildete Kräftezug ein geschlossenes Vieleck mit stetigem Umfahrungssinn ergibt.

Die Reihenfolge der Aneinanderreihung kann beliebig sein.

Kann man aus zwei oder mehr Kräften eine Mittelkraft bilden, so müßte man, wenn Gleichgewicht herrschen sollte, deren Wirkung durch Hinzufügung einer Kraft aufheben, welche ebenso groß, gleichgerichtet, aber von entgegengesetztem Sinne ist, wie die Mittelkraft. Man nennt eine solche Kraft dann Gleichgewichtskraft.

Rechnerische Lösung. Man zerlegt jede der angreifenden Kräfte in ihre wagerechte und senkrechte Seitenkraft. Für den Fall des Gleichgewichtes muß dann die Mittelkraft aller wagerechten Seitenkräfte, also deren Summe (ΣH), wie auch die Mittelkraft aller senkrechten Seitenkräfte, also deren Summe (ΣV) gleich Null sein. Mithin erhält man folgenden

Lehrsatz. Ein Körper befindet sich unter der Einwirkung mehrerer an einem Punkt angreifender Kräfte im Gleichgewicht, wenn

1. Die Summe aller wagerechten Seitenkräfte gleich Null ist,
$$\Sigma H = 0$$

2. Die Summe aller senkrechten Seitenkräfte gleich Null ist,
$$\Sigma V = 0.$$

IV. Kräfte verschiedener Richtung mit verschiedenen Angriffspunkten.

a) Die Kraftrichtungen schneiden sich. 1. Zusammensetzung. Wirken zwei Kräfte P_1 und P_2 an verschiedenen Angriffspunkten A und B, wie es z. B. bei Holzkonstruktionen häufig vorkommt (Fig. 18), so verschiebt man die beiden Kräfte in ihrer Richtung bis zu ihrem Schnittpunkt, welcher jetzt gemeinschaftlicher Angriffspunkt wird, und setzt die Kräfte in bekannter Weise mit Hilfe des Kräftedreiecks zusammen.

In Fig. 18 ergibt sich als Mittelkraft aus der auf den Pfosten wirkenden Kraft $P = 6000$ kg und die auf den Pfosten von der Strebe übertragenen Kraft $S = 3000$ kg für einen Kräftemaßstab 1 cm = 2000 kg $AE = R = 4{,}35$ cm $= 4{,}35 \cdot 2000 = 8700$ kg.

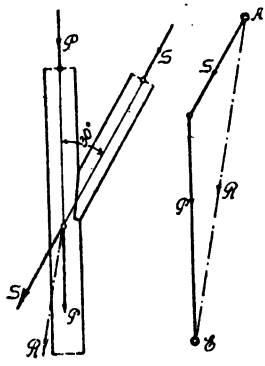


Fig. 18.

Wirken mehr als zwei Kräfte auf den Körper, so wiederholt man das eben beschriebene Verfahren in sinngemäßer Weise mehrfach, indem man zunächst zwei Kräfte zur Mittelkraft im Kräftedreieck zusammensetzt, aus dieser mit der nächsten Einzelkraft wieder eine neue Mittelkraft bildet und so fortfährt, bis man die Gesamtmittelkraft erhält. Die Reihenfolge der Zusammensetzung der gegebenen Kräfte ist beliebig. Die Angriffspunkte findet man in der Hauptfigur durch Festlegung der Schnittpunkte der entsprechenden gegebenen Kräfte mit den Zwischenmittelkräften. Den Linienzug der aufeinanderfolgenden Mittelkräfte nennt man **Mittelkraftvieleck (Resultantenpolygon)**.

Die Schnittpunkte der Kraftrichtungen liegen außerhalb der Zeichenebene.

Hierfür kommt nur das zeichnerische Verfahren in Betracht.

a) Es wirken nur zwei Kräfte. Man zerlegt nach Fig. 19 zunächst P_1 in zwei beliebig angenommene Seitenkräfte S_0 und S_1 und ebenso P_2 in zwei Seitenkräfte S_1' und S_2, aber so, daß $S_1' = S_1$ wird, jedoch entgegengesetzte Richtung wie S_1 erhält. Dadurch wird S_2 nach Größe, Richtung und Sinn bestimmt.

Die Richtungen der Seitenkräfte der Kraft P_1 werden nun nach einem auf P_1 beliebig angenommenen Punkt I (Fig. 19a) übertragen, der Sinn der Kräfte gleichfalls angegeben und sodann der Schnittpunkt II der Kraft S_1 mit P_1 bestimmt, worauf man die Richtung und den Sinn der Seitenkräfte von P_0 nach dem Schnittpunkt II überträgt.

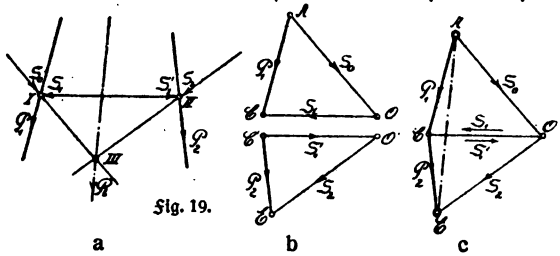
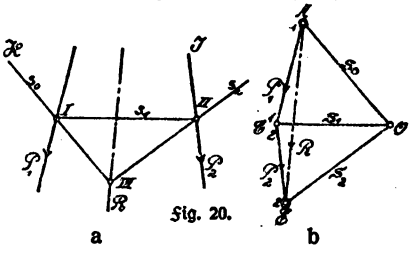


Fig. 19.
a b c

Da S_1 und S_1' gleiche Richtung und Größe, aber entgegengesetzten Sinn haben, so heben sie sich gegenseitig auf, und an Stelle der durch S_0 und S_1

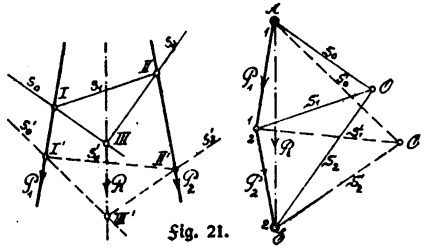
bzw. S_1' und S_2 ersetzten Kräfte P_1 und P_2 verbleiben mithin nur noch als allein wirkende Kräfte die Seitenkräfte S_0 und S_2. Schiebt man nun nach Fig. 19c die beiden Kräftedreiecke aus Fig. 19b zusammen, daß S_1 und S_1' zusammenfallen, und setzt P_1 und P_2 zur Mittelkraft R zusammen, so erkennt man sofort, daß R auch die Mittelkraft der Kräfte S_0 und S_2 ist. Man erhält daher die Lage von R in der Hauptfigur, indem man daselbst S_0 und S_2 zum Schnitt bringt und durch den Schnittpunkt III eine Gleichlaufende zu R zieht. Die Zeichnung der Fig. 19b ist offenbar nicht nötig, man kann vielmehr gleich, wie folgt, verfahren:

Man setzt im Kräftedreieck P_1 und P_2 zu R zusammen (Fig. 20a), nimmt einen beliebigen Punkt O, welcher **Pol** genannt wird, an, verbindet O mit sämtlichen Endpunkten der gegebenen Kräfte und erhält so die **Polstrahlen** $AO = S_0$, $CO = S_1$ und $EO = S_2$. Die ganze Figur heißt **Polfigur**. Durch einen auf P_1 beliebig angenommenen Punkt I zieht man nun $s_0 \parallel S_0$ und $s_1 \parallel S_1$ bis zum Schnittpunkt II mit P_2, und sodann durch II $s_2 \parallel S_2$, bringt die beiden äußeren Strahlen s_0 und s_2 zum Schnitt III und zieht durch III R gleichlaufend zu R in der Polfigur.



Der Linienzug $s_0 s_1 s_2$ in der Hauptfigur heißt **Seileck, Seilvieleck, Seilpolygon, Seilzug oder Seillinie**, da ein in den Punkten H und I befestigt gedachtes Seil, an welchem die Lasten P_1 und P_2 in der angegebenen Weise in den Knotenpunkten I und II wirken (ein Versuch läßt sich mit einer Schnur in einfacher Weise anstellen), die Form dieses Seilzuges annehmen würde. Die Seiten $s_0 s_1 s_2$ heißen **Seilstrahlen**, s_0 und s_2 sind die **äußeren Seilstrahlen**, da sie im Krafteck die Mittelkraft einschließen.

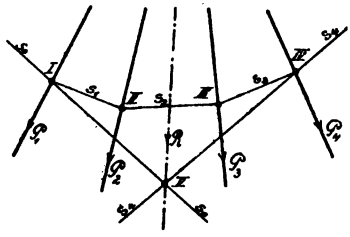
Da S_0 beliebig angenommen war, so folgt, daß man den Pol O auch beliebig wählen kann. Das Seileck wird zwar bei anderer Wahl des Poles auch anders, doch erhält man, wie Fig. 21



zeigt, dieselbe Lage der Mittelkraft. Man kann also unzählige Seilecke zeichnen, doch liegen alle Schnittpunkte der äußeren Seilseiten auf einer Geraden, welche die Lage der Mittelkraft bestimmt.

b) Es wirken beliebig viele Kräfte. Das unter a) geschilderte Verfahren wird wiederholt angewandt:

Man trägt nach Fig. 22 die gegebenen Kräfte zu einem Vieleck in beliebiger Reihenfolge aneinander und bestimmt die Mittelkraft $AE = R$ nach Größe, Richtung und Sinn. Sodann wählt man einen Pol, zieht die Polstrahlen S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, (uff.) und gleichlaufend zu ihnen



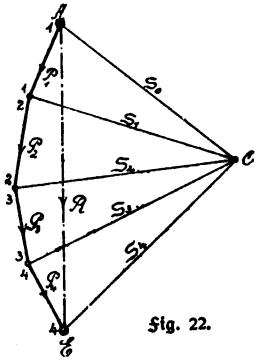


Fig. 22.

den Seilzug s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, von einem beliebigen Punkt I auf P_1 ausgehend, in der Hauptfigur. Die Lage von R daselbst erhält man, indem man durch den Schnittpunkt V der äußeren Seilstrahlen s_0 und s_4 eine Gleichlaufende zu R im Krafteck zieht. Auch hier sind unzählige Lösungen möglich, welche aber alle dasselbe Ergebnis zeitigen.

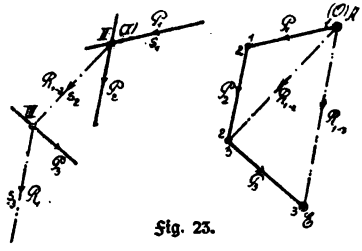


Fig. 23.

Der Pol wird am besten so gewählt, daß die beiden äußern Polstrahlen etwa einen rechten Winkel bilden. Zuweilen verlegt man auch den Pol in den Anfangspunkt der ersten Kraft (Fig. 23).

2. **Zerlegung.** Ist eine gegebene Kraft in zwei Seitenkräfte zu zerlegen, so ist die Aufgabe nur dann lösbar, wenn die Richtungen der gesuchten Kräfte mit der Richtung der gegebenen bei entsprechender Verlängerung der Richtungslinien sich in einem Punkte schneiden. Die Lösung erfolgt dann ebenso, wie unter III, a, 2 angegeben wurde.

Soll eine bekannte Kraft R in drei Seitenkräfte P_1, P_2, P_3 zerlegt werden, welche nach Lage und Richtung gegeben sind, so ist das nur dann möglich, wenn die gegebenen Richtungen 1, 2, 3 der nach Größe und Sinn unbekannten Seitenkräfte sich nicht in einem Punkte schneiden, und wenn keiner ihrer Schnittpunkte auf R liegt.

Man bringt in diesem Falle zwei der gegebenen Richtungen, etwa 1 und 2, zum Schnitt (Fig. 24) im Punkte I und ebenso Richtung 3 zum Schnitt mit R im Punkte II. Nun verbindet man I und II und zerlegt R in P_3 und in eine in der Verbindungslinie III wirkende Kraft $R_{1,2}$, welche mithin die Mittelkraft von P_1 und P_2 darstellen muß und noch nach den Richtungen 1 und 2 in P_1 und P_2 zu zerlegen ist.

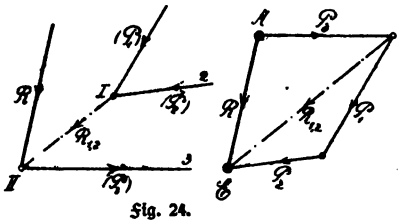
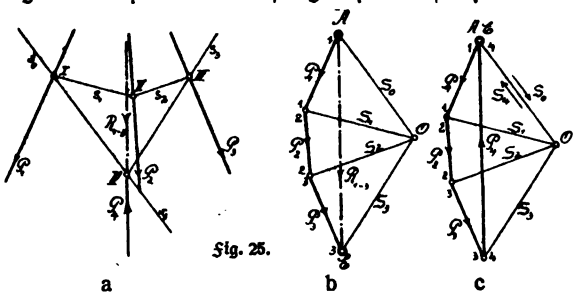


Fig. 24.

Die Aufgabe, eine Kraft in mehr als drei Seitenkräfte zu zerlegen, ist nicht eindeutig lösbar. Man sagt in solchem Falle, die Aufgabe ist statisch unbestimmt.

3. Gleichgewicht. Eine Kraftgruppe ist im Gleichgewicht, wenn die Gesamtwirkung der vorhandenen Kräfte gleich Null ist. Hat man zu drei gegebenen Kräften P_1, P_2 und P_3 mit Hilfe des Seilecks die Mittelkraft R_{1-3} bestimmt (Fig. 25b), so kann der Gleichgewichtszustand offenbar nur dann eintreten, wenn man die Wirkung von R_{1-3} durch Hinzufügung einer Kraft P_4 aufhebt, welche die gleiche Größe, Richtung und Lage, aber entgegengesetzten Sinn wie R_{1-3} haben muß (Fig. 25a). P_4 bildet dann mit P_1, P_2 und P_3 ein geschlossenes Kräftevieleck (Fig. 25c), die Gesamtmittelkraft ist also gleich Null. Die Polstrahlen S_0 und S_4 decken sich, haben also gleiche Größe, aber entgegengesetzten Sinn, und im Seileck fallen die beiden äußeren Seil-



a b c

Fig. 25.

ſtrahlen in dieſelbe Gerade, das Seileck bildet alſo auch eine geſchloſſene Figur.

Beliebig viele in einer Ebene zerſtreut liegende Kräfte ſind alſo im Gleichgewicht, wenn ſowohl das zugehörige Krafteck, wie auch das entſprechende Seileck ſich ſchließen.

b) Die Kräfterichtungen ſchneiden ſich nicht (parallele Kräfte).

1. Zuſammenſetzung. Die Löſung erfolgt wieder mit Hilfe des Kraft- und Seilecks, da man parallele Kräfte als ſolche Kräfte auffaſſen kann, deren Schnittpunkt in unendlicher Entfernung liegt. Das Krafteck geht in eine Gerade über, die Mittelkraft fällt als Schlußlinie mit ihr zuſammen und iſt daher gleichlaufend zu den Seitenkräften.

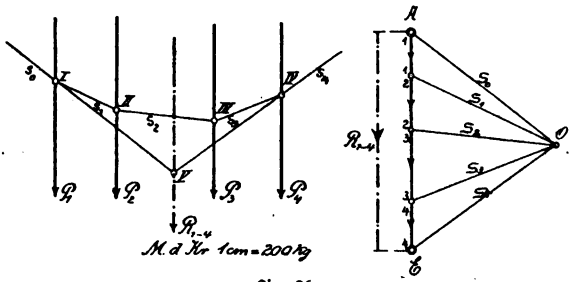


Fig. 26.

Fig. 26 zeigt die Löſung für 4 Einzelkräfte gleichen Sinnes $P_1 = 120$ kg, $P_2 = 150$ kg, $P_3 = 200$ kg, $P_4 = 130$ kg (Kräftemaßſtab 1 cm = 200 kg). Es wird $R_{1-4} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 120 + 150 + 200 + 130 = 600$ kg. Ihre Lage wird durch den Schnittpunkt der beiden äußeren Seilſtrahlen s_0 und s_4 beſtimmt. Eine weitere Erklärung dürfte ſich erübrigen.

Parallele Kräfte mit verſchiedenem Sinn. Zunächſt ſoll der Fall für zwei gegebene Kräfte P_1 und P_2 unterſucht werden, von denen $P_1 > P_2$ ſei. Man ſetzt die Kräfte zur Mittelkraft $R = P_1 - P_2$ zuſammen (Fig. 27), wählt einen beliebigen Pol, zieht die Polſtrahlen und zeichnet das Seileck in bekannter Weiſe, wobei man nur auf die genaue Reihenfolge der Seilſtrahlen zu achten hat. Die Mittelkraft geht wieder durch den Schnittpunkt III der beiden äußeren Seilſtrahlen s_0 und s_2. Sie liegt mithin außerhalb der beiden Kräfte auf Seite der größeren Kraft (was ſtets der Fall iſt) und hat den Sinn der letzteren.

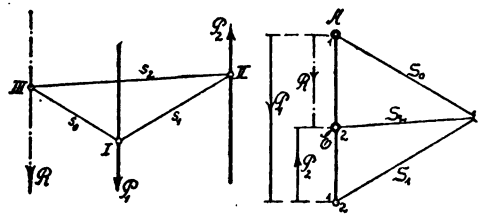


Fig. 27.

Kräftepaar. Ist $P_1 = P_2$, so wird $R = 0$. Die beiden äußeren Polstrahlen S_0 und S_2 fallen zusammen (Fig. 28), mithin werden die Seilstrahlen s_0 und s_2 gleichlaufend, ihr Schnittpunkt nnd damit der Angriffspunkt von R liegt im Unendlichen. Zwei gleich große, gleichlaufende Kräfte mit entgegengesetztem Sinn lassen sich daher nicht zusammensetzen. Man nennt eine solche Kräftegruppe ein Kräftepaar. Da $R = 0$ ist, kann eine fortschreitende Bewegung nicht eintreten. Trotzdem heben sich die beiden Kräfte P_1 und P_2 nicht auf, sondern rufen eine **drehende Bewegung** hervor.

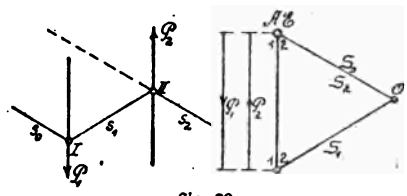


Fig. 28.

Sind mehrere parallele Kräfte zu ihrer Mittelkraft R zusammenzusetzen, so trägt man sie in beliebiger Reihenfolge aneinander an und erhält ihre Größe als algebraische Summe der Einzelkräfte (Fig. 29). Die Lage der Mittelkraft erhält man wieder mit Hilfe des Seilecks, wobei man nur auf die genaue Reihenfolge der Seilstrahlen zu achten hat.

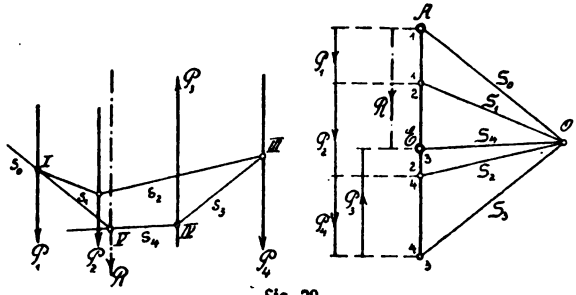


Fig. 29.

2. **Zerlegung.** Die Zerlegung einer Kraft in zwei der Lage nach gegebene Seitenkräfte kommt in der Praxis bei belasteten Trägern auf zwei Stützen vor und ist daher von größter Wichtigkeit. Die Belastung R des Trägers wird offenbar auf die Auflager an beiden Trägerenden übertragen, und die hier hervorgerufenen Auflagerdrücke sind die gesuchten Seitenkräfte P_1 und P_2 der belasteten Kraft R. Die Lösung der Aufgabe ist nichts andres als die Umkehrung der weiter oben behandelten Aufgabe, zwei gleichlaufende Kräfte zur Mittelkraft zusammenzusetzen.

Man trägt R in einer Nebenfigur (Fig. 30) nach einem gewählten Kräftemaßstab auf, wählt den Pol O beliebig, zieht die Polstrahlen S_0 und S_2,

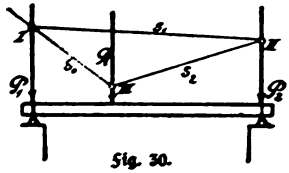
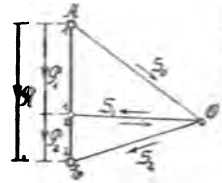


Fig. 30.



zerlegt also damit R in zwei Seitenkräfte S_1 und S_2. Durch einen beliebigen Punkt III auf R zieht man sodann $s_0 \parallel S_0$ und $s_2 \parallel S_2$, welche P_1 in I und P_2 in II schneiden. Durch Verbindung von I und II erhält man den Seilstrahl s_1, zu welchem man in der Polfigur eine Gleichlaufende durch O zieht. Diese zerlegt R in die gesuchten Seitenkräfte P_1 und P_2. Die Richtigkeit des Verfahrens ist ohne weiteres einzusehen, wenn man umgekehrt wieder P_1 und P_2 zu R zusammensetzt.

Die Gerade I—II nennt man die **Schlußlinie des Seilecks**. Sie soll künftig nur mit s bezeichnet werden.

Die Aufgabe, eine Kraft in mehr als zwei gleichlaufende Seitenkräfte zu zerlegen, ist statisch unbestimmt.

3. **Gleichgewicht.** Zwei parallele Kräfte gleichen Sinnes lassen sich stets durch eine Mittelkraft ersetzen, können sich also nicht im Gleichgewicht halten. Zwei parallele Kräfte entgegengesetzten Sinnes von verschiedener Größe können gleichfalls durch eine Mittelkraft ersetzt werden, sind mithin auch nie im Gleichgewicht, und endlich zwei parallele Kräfte entgegengesetzten Sinnes, aber gleicher Größe bilden ein Kräftepaar und befinden sich daher auch nicht im Gleichgewicht.

Drei parallele Kräfte sind offenbar dann im Gleichgewicht, wenn je zwei von ihnen eine Mittelkraft haben, die mit der dritten nach Lage und Größe übereinstimmt, aber entgegengesetzten Sinn hat. In Fig. 30 wirken die 3 Kräfte R, P_1 und P_2, letztere als Seitenkräfte von R. Fügt man an Stelle von P_1 und P_2 zwei gleichgroße Kräfte $A = P_1$ und $B = P_2$ hinzu, welche aber entgegengesetzten Sinn haben, so heben diese die Wirkung von P_1 und P_2, also auch von R auf und es herrscht Gleichgewicht (Fig. 31). A und B sind dann **Gleichgewichtskräfte**. Man findet sie offenbar sofort, wenn man in Fig. 30 an Stelle der Pfeile von P_1 und P_2 Pfeile von entgegengesetzter Richtung anbringt, wie das in Fig. 31 geschehen ist. A und B werden also

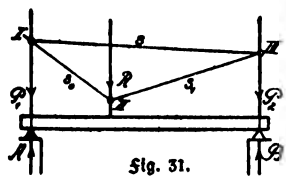
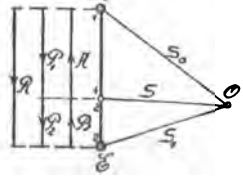


Fig. 31.



auf gleiche Weise unter sinngemäßer Anwendung des eben Gesagten gefunden, wie weiter oben P_1 und P_2.

Dieser Fall findet namentlich Anwendung bei Trägern auf zwei Stützen. Die auf Seite 21 bereits erwähnten Stützendrücke oder Auflagerdrücke P_1 und P_2 (Fig. 30) rufen in den Auflagerpunkten nach dem Gesetz der Gegenwirkung gleichgroße, aber entgegengesetzt wirkende Stützenwiderstände oder Auflagerwiderstände hervor (Fig. 31). Die Kräftegruppe R, A und B befindet sich dann im Gleichgewicht, es herrscht also Ruhezustand und Krafteck wie auch Seileck sind geschlossen (Fig. 31).

Wird der Träger durch mehr als eine Kraft belastet, so ändert sich an der Lösung der Aufgabe nichts, da man alle diese Kräfte durch

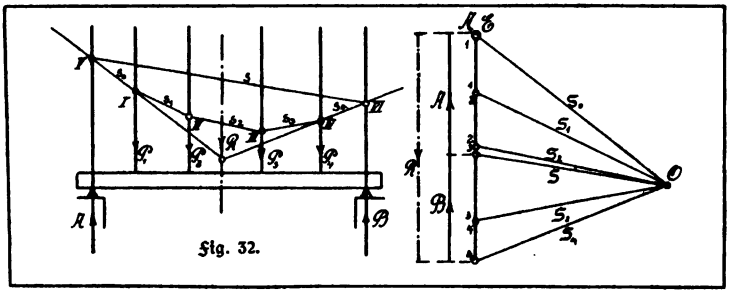


Fig. 32.

ihre Mittelkraft R ersetzen kann, wodurch der Fall auf den eben behandelten zurückgeführt wird. Fig. 32 zeigt die Lösung der Aufgabe für einen von vier Kräften belasteten Träger: eine weitere Erklärung ist wohl überflüssig.

V. Anwendung auf einfache Stabkonstruktionen.

a) Allgemeines. Knotenpunkte. Die bisher behandelten Gesetze über die Zerlegung von Kräften und das Gleichgewicht der Kräfte finden häufig Anwendung bei der Untersuchung einfacher Baukonstruktionen. Dabei sind in der Regel die *inneren* Kräfte zu ermitteln, welche den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Von ihnen ist die Wahl der Abmessung der einzelnen Bauteile abhängig. Gleichgewicht muß aber in jedem Punkte eines Bauteiles herrschen, weshalb diejenigen Punkte von besonderer Wichtigkeit sind, in denen die äußeren

Kräfte angreifen. Für den Ruhezustand ist es erforderlich, daß die einzelnen Punkte eines Bauteiles miteinander in starre Verbindung gebracht werden, wodurch sich dann häufig stabförmige Konstruktionen ergeben, wie in Fig. 33 an einem einfachen Beispiel dargestellt ist. Zur Sicherung des Punktes A sind zwei, an der unverschieblichen Mauer befestigte Stäbe AB und AC angebracht. Auf diese Weise entsteht ein Dreieck ABC, welches bekanntlich unverschieblich ist. Der Punkt A, in dem die Stäbe zusammentreffen, heißt Knotenpunkt; eine Kraftübertragung kann, wie ohne weiteres einzusehen, nur in den Richtungen AC und AB stattfinden. Auch die Punkte B und C sind als Knotenpunkte zu betrachten.

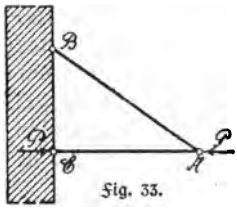


Fig. 33.

Wirkt nun im Punkte A eine Kraft P in der angedeuteten Weise, so wird diese in der Richtung AC auf den Punkt C übertragen und ruft dort nach dem Gesetze der Gegenwirkung eine gleichgroße, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft P (Fig. 33) hervor. Man sieht ohne weiteres, daß diese beiden Kräfte P das Bestreben haben, die Punkte A und C einander zu nähern, den sie verbindenden Stab AC also zu drücken. Mithin entsteht in ihm eine Druckbeanspruchung. Hätte die Kraft P im Punkte A entgegengesetzten Sinn, so müßte die Pfeilrichtung von P entsprechend auch im Punkte C von C weggerichtet sein; die Punkte A und C würden voneinander entfernt; im Stabe entsteht eine Zugbeanspruchung.

Da die Kraft P sich im Innern des Stabes bis C, wo sie durch die Festigkeit des Mauerkörpers eine sie aufhaltende Gegenkraft hervorruft, fortpflanzt, so muß sie in jedem Stabquerschnitte eine ihr gleiche innere Kraft P erzeugen, welche Spannkraft genannt wird und nach obigem entweder eine Druckkraft oder eine Zugkraft ist. Die Ermittelung der Größe der Spannkräfte und die Entscheidung der Frage, ob in den einzelnen Teilen einer Konstruktion Zug oder Druck herrscht, wird am besten an Beispielen gezeigt.

b) Konsolträger. Der in Fig. 34a gegebene Konsolträger eines Balkons werde im Punkte A durch eine senkrecht wirkende Last $P = 1400$ kg (Belastung durch Balkondecke und -Brüstung) belastet. Die in H und S auftretenden Stabkräfte, sowie die Beanspruchungen des Mauerwerks sind zu ermitteln. Kräftemaßstab 1 cm = 1000 kg.

Die Kraft P ruft in den Stäben AC und AB die Spannkräfte H und S hervor; eine Übertragung nach anderer Richtung ist nicht möglich. Man zerlegt daher im Kräftedreieck (Fig. 34b) P nach diesen beiden Richtungen in die Seitenkräfte P_H und P_S. Nun muß im Punkte A Gleichgewicht herrschen, mithin müssen die im Innern der Stäbe AC und AB auftretenden Spannungen H und S die Wirkung der Seitenkräfte P_H und P_S, und damit auch die Wirkung ihrer Mittelkraft P aufheben; man zeichnet daher am besten den Punkt A durch einen kreisförmig geführten Schnitt besonders heraus (Fig. 34b), das Kräftedreieck, in dem die Zerlegung von P in P_H und P_S vorgenommen wird, wird zweckmäßig darunter gezeichnet. Durch den geführten Schnitt wird der Zusammenhang der Stäbe bei D und E zerstört, so daß eine Übertragung von P_H im Punkte D nach dem festen Punkt C nicht mehr erfolgen kann. Soll dennoch der Gleichgewichtszustand wieder hergestellt werden, so muß in der Richtung des Stabes AC eine der Kraft P_H gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft H angebracht werden. Ebenso ist im Punkte E die Anbringung einer Kraft S erforderlich, welche ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet ist wie P_S. Denkt man sich nun den Punkt A festgehalten, so erkennt man, daß H am Stabstumpf AD ziehend und S an dem Stabstumpf AE ziehend wirkt. S und H geben nun die Wirkungen an, welche bei nicht gelöstem Zusammenhang ausgeübt werden, stellen also die in den Stäben wirkenden Spannkräfte an. Man erkennt hieraus aber auch die wichtige Regel:

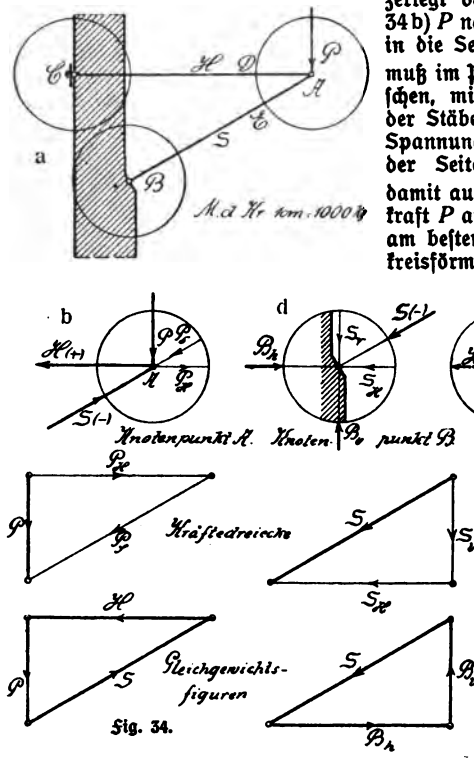


Fig. 34.

Ist der Sinn einer inneren Kraft dem Knotenpunkt zugewendet, so ist die Spannkraft eine Druckkraft, ist sie vom Knotenpunkte weggewendet, so ist sie eine Zugkraft.

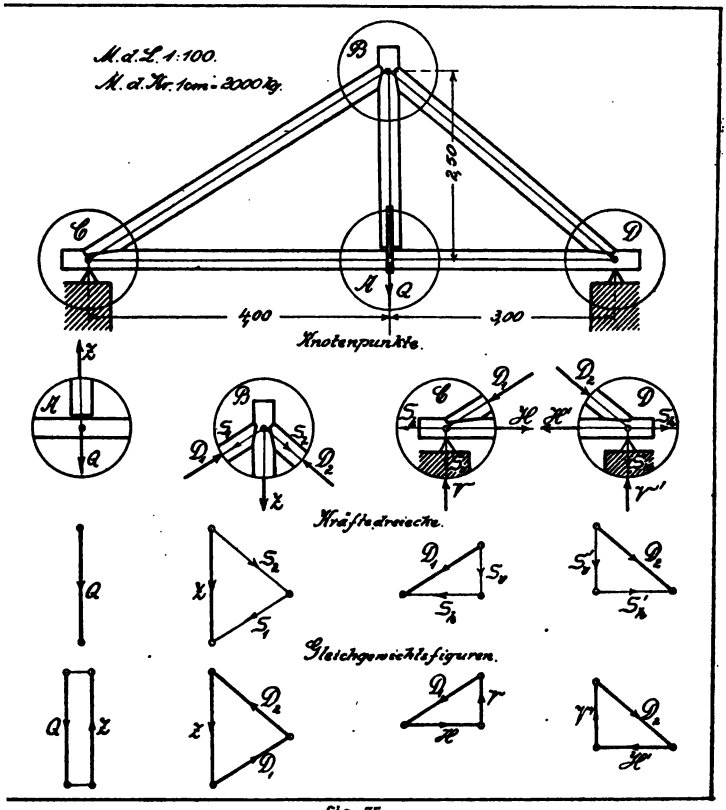


Fig. 35.

Zug und Druck sollen fernerhin durch das Vorzeichen unterschieden werden, und zwar Zug durch +, Druck durch — bezeichnet werden. Die Kräfte P, H und S müssen sich im Punkte A das Gleichgewicht halten. Man kann daher aus dem Kräftedreieck unmittelbar ihre Größe und ihren Sinn, wie folgt, bestimmen: Man löst den Knoten durch einen kreisförmigen Schnitt von dem übrigen Baukörper in besonderer Zeichnung heraus, bringt die äußeren Kräfte innerhalb des Schnittkreises an, bestimmt, wie oben angegeben, diejenigen Kräfte H und S, welche der Kraft P das Gleichgewicht halten und überträgt den aus der Gleichgewichtsfigur, welche ein geschlossenes Dreieck ergeben muß (Fig. 34b), gewonnenen Sinn von H und S außerhalb des Schnittkreises an die Stab-

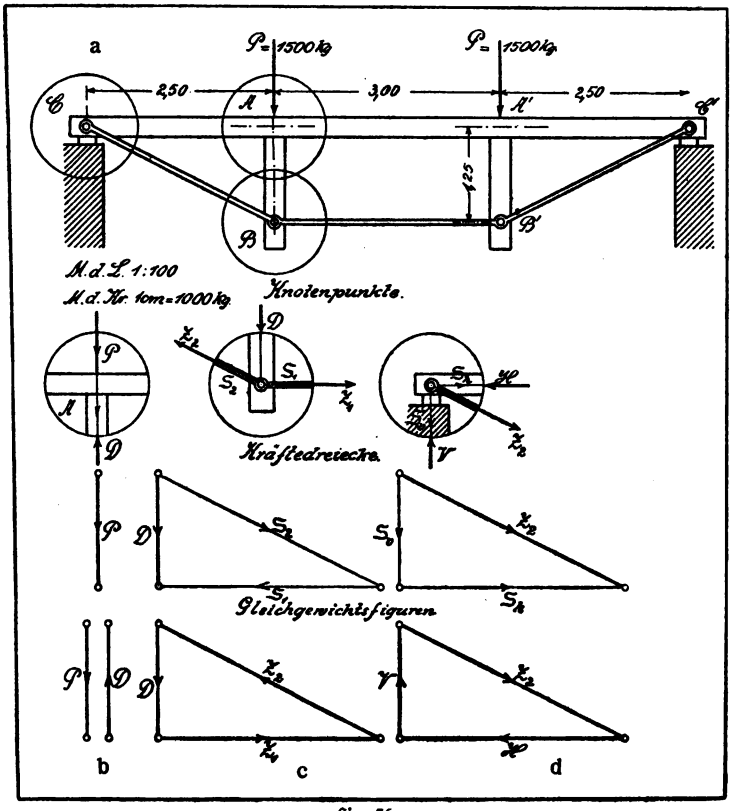


Fig. 36.

stumpfe. Hierauf stellt man an der Hand obiger Regel fest, ob Zug oder Druck in den Stäben herrscht. In unserem Falle ergibt sich, daß H eine Zugkraft und S eine Druckkraft ist. Man mißt $H = 2{,}45$ cm und $S = 2{,}83$ cm, mithin wird $H = 2{,}45 \cdot 1000 = 2450$ kg und $S = 2.83 \cdot 1000 = 2830$ kg.

Schneidet man den Punkt C heraus, so ist die gefundene Stabkraft H als Zugkraft am Stabstumpf anzubringen (der Pfeil muß also vom Knotenpunkt weg zeigen.) Der Kraft H muß durch eine Gegenkraft das Gleichgewicht gehalten werden. Man ordnet daher bei C eine entsprechend große Ankerplatte an (in Fig. 34c durch einen kleinen senkrechten Strich angedeutet), welche auf das Mauerwerk drückt und einen Gegendruck $H_1 = H$ hervorruft.

Am Stumpfe im Punkte B wirkt die Druckkraft S (Pfeil also gegen den Stumpf gerichtet). Sie ist in eine lotrechte und wagerechte Seitenkraft S_v und S_h (Abb. 34d) zu zerlegen, welche beide durch gleichgroße, aber entgegengesetzt wirkende Auflagerkräfte B_v und B_h im Gleichgewicht erhalten werden. Hier wird $B_v = P$ und $B_h = H$.

Tritt der Fall ein, daß im Punkte A mehrere äußere Kräfte wirken, so ersetzt man sie durch ihre Mittelkraft R und verfährt dann ebenso wie vorstehend beschrieben.

Mehr als zwei Stäbe mit unbekannten Spannkräften dürfen selbstverständlich an einem Knoten nicht angreifen, da sonst die Aufgabe statisch unbestimmt wäre.

c) **Das einfache Hängewerk.** In Fig. 35 ist die Untersuchung für ein einfaches, unsymmetrisches Hängewerk durchgeführt. An der Hängesäule wirkt eine äußere Kraft $Q = 3000$ kg. Es ergibt sich, daß dadurch in der Hängesäule AB Zug, in den beiden Streben BC und BD Druck und in dem Balken CD Zug auftritt. Die Konstruktion findet Anwendung, wenn die Stützlänge des Balkens CD eine gewisse Länge (6 m) überschreitet, um im Punkte A eine weitere Unterstützung zu schaffen. Wird $AC = AD$, so entsteht ein symmetrisches Hängewerk und die Auflagerdrücke V in den Punkten C und D werden gleich groß. Die Größe der Spannkräfte und Auflagerdrücke ist leicht nachzumessen (Kräftemaßstab 1 cm = 2000 kg).

d) **Der doppelt armierte Träger.** Er findet gleichfalls bei großer Balkenlänge CC' Anwendung und schafft die Unterstützungspunkte A und A' (Abb. 36a). Die Untersuchung ist für die beiden in den Punkten A und A' angreifenden Kräfte $P = 1000$ kg geführt. In den Streben AB und $A'B'$ ergibt sich Druck, im Balken CC' ebenfalls Druck, in den Stangen BC, BB' und $B'C'$ Zug (daher Zugstangen genannt). Die Untersuchung ist mit Rücksicht auf die Symmetrie der Konstruktion nur für die Punkte A (Fig. 36b) B (Fig. 36c) und C (Fig. 36d) durchgeführt, da für die Punkte A', B' und C' dieselben Ergebnisse gefunden werden würden (Kräftemaßstab 1 cm = 1000 kg).

VI. Das statische Moment der Kräfte. Momentensatz.

a) **Der Begriff des statischen Momentes.** Wie wir sahen, führt eine Kraft, welche an einem Körper angreift, eine fortschreitende Bewegung desselben herbei. Hält man jedoch einen Punkt des Körpers fest, so sucht die Kraft, ihn um diesen Punkt zu drehen (z. B. Wagenrad). Eine weite Anwendung findet das Gesetz beim Hebel. Aus dem Hebelgesetz ist auch allgemein bekannt, daß das Drehbestreben um so größer ist, je größer einmal die Entfernung der angreifenden Kraft vom Drehpunkt (Hebelarm genannt), und je größer zum andern die

angreifende Kraft ist. Soll ein Bauteil nun im Gleichgewicht sich befinden, so darf nicht nur keine fortschreitende Bewegung, sondern natürlich auch keine drehende Bewegung an ihm eintreten. Hieraus erhellt die Wichtigkeit des Hebelgesetzes für die Statik. Man nennt in der Statik das Drehbestreben statisches Moment oder abgekürzt Moment (M). Es ist also

das statische Moment einer Kraft P in bezug auf einen beliebigen Drehpunkt O gleich dem Produkt aus der Kraft und dem zugehörigen Hebelarm p, also:

$$M = P \cdot p.$$

Gewöhnlich wird die Kraft in kg, der Hebelarm in cm ausgedrückt, so daß sich als Maßeinheit für das Moment „Kilogrammzentimeter" (kgcm) ergibt; doch findet man bei großen Momenten auch Tonnenmeter (tm) als Einheit.

Wird der Hebelarm gleich Null, geht also die Kraft durch den Drehpunkt O hindurch, so wird naturgemäß auch das Moment der Kraft gleich Null, eine Drehnng kann nicht eintreten, es wird auf den Drehpunkt nur ein Druck ausgeübt.

Da man zeichnerisch eine Kraft durch eine Linie darstellt, muß sich in der Zeichnung ein Moment als Fläche ergeben (Produkt zweier Linien).

Das Drehbestreben kann nach zwei verschiedenen Seiten eintreten. Ruft eine Kraft eine Drehung im Uhrzeigersinne hervor, so nennt man das Moment rechtsdrehend (gewöhnlich mit + bezeichnet), erfolgt die Drehung dem Uhrzeiger entgegengesetzt, so heißt es linksdrehend (dann entsprechend mit — bezeichnet) Fig. 37. Nach dem Vorzeichen unterscheidet man daher auch positive und negative Momente.

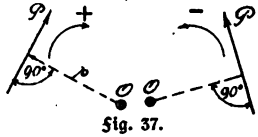


Fig. 37.

Treten nur Momente mit gleichem Drehsinn auf, so summieren sich naturgemäß ihre Wirkungen, während bei gleichzeitigem Auftreten von Momenten mit verschiedenem Drehsinn sich die Momente teilweise oder ganz aufheben. Ist letzteres der Fall, also die algebraische Summe aller Momente bezogen auf denselben Drehpunkt gleich Null, so kann der Körper keine drehende Bewegung ausführen, er ist also im Gleichgewicht. Daraus folgt als weitere Gleichgewichtsbedingung:

Soll ein Körper im Gleichgewicht sein, so muß die algebraische Summe aller statischen Momente, bezogen auf denselben Drehpunkt, gleich Null sein. Oder kurz:

$$\sum M = 0.$$

Da die Mittelkraft R einer Kräftegruppe dieselbe Wirkung hervorruft, wie die Einzelkräfte zusammen, so muß auch das Drehbestreben, welches R in bezug auf einen beliebigen Drehpunkt hervorruft, dasselbe sein, welches die Einzelkräfte in bezug auf denselben Drehpunkt ausüben. Hieraus folgt der wichtige Momentensatz:

Das statische Moment der Mittelkraft einer Kräftegruppe in bezug auf einen beliebigen Drehpunkt ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte bezogen auf denselben Drehpunkt.

Von diesem Satz werden wir oft Gebrauch zu machen haben. Dabei ist streng auf den Drehsinn der Momente zu achten. Ist r der Hebelarm der Mittelkraft R, und p der Hebelarm je einer Einzelkraft P, so läßt sich der Momentensatz, wie folgt, als Formel schreiben:

$$R \cdot r = \sum P \cdot p.$$

b) Bestimmung der Lage der Mittelkraft einer Kräftegruppe auf rechnerischem Wege. Anwendung des Momentensatzes. Mit Hilfe des Momentensatzes läßt sich die Lage der Mittelkraft einer Kräftegruppe bestimmen, nachdem man deren Größe, Richtung und Sinn ermittelt hat.

Man wählt hierzu einen beliebigen Drehpunkt, stellt in bezug auf ihn die Hebelarme der Einzelkräfte fest und bildet die algebraische Summe der Momente der Einzelkräfte. Ist x der Hebelarm der Mittelkraft (also deren senkrechter Abstand vom Drehpunkt), so ist nach obiger Gleichung $R \cdot x = \Sigma P \cdot p$, woraus:

$$x = \frac{\Sigma P \cdot p}{R}.$$

Besonders einfach wird das Verfahren, wenn die Kräfte parallel sind.

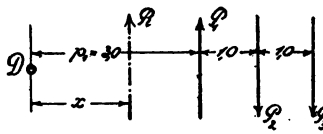


Fig. 38.

Beispiel. Gegeben seien nach Fig. 38 die Kräfte $P_1 = +8000$ kg, $P_2 = -3000$ kg, $P_3 = -1000$ kg in gegenseitigen Abständen von 1,0 m. Gesucht R nach Lage, Größe, Richtung und Sinn.

Lösung. Es ist $R = \Sigma P$, also $R = P_1 - P_2 - P_3 = 8000 - 3000 - 1000 = +4000$ kg.

Wählt man als Drehpunkt den $p_1 = 3{,}0$ m von P_1 entfernten Punkt D, so wird der Hebelarm von P_2 $p_2 = 4{,}0$ m und der Hebelarm von P_3 $p_3 = 5{,}0$ m, mithin:

$$R \cdot x = P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2 - P_3 \cdot p_3$$

$$\text{oder: } 4000 \cdot x = 8000 \cdot 300 - 3000 \cdot 400 - 1000 \cdot 500$$

$$x = \frac{2\,400\,000 - 1\,200\,000 - 500\,000}{4000} = \frac{700\,000}{4000}$$

$$x = +175 \text{ cm}.$$

Mithin ist R von D 1,75 m und von P_1 1,25 m entfernt. Da R sich positiv ergab, so hat es denselben Wirkungssinn wie P_1, ist also nach oben gerichtet.[1])

Mit Hilfe des Momentensatzes läßt sich auch das statische Moment einer beliebigen Kräftegruppe mit Hilfe des Krafteck und Seileck ermitteln.

Man bestimmt nach Fig. 39 R mit Hilfe des Krafteck und Seileck. Sodann nimmt man einen beliebigen Drehpunkt D an (Fig. 39) und zieht durch ihn eine Gleichlaufende zu R, welche auf den äußersten Seilstrahlen s_0 und s_4 die Strecke $FG = y$ abschneidet. Von D zieht man $CI \perp FG$ und erhält dadurch den Hebelarm r. Das statische Moment der Kräftegruppe ist in bezug auf D daher $M = R \cdot r$.

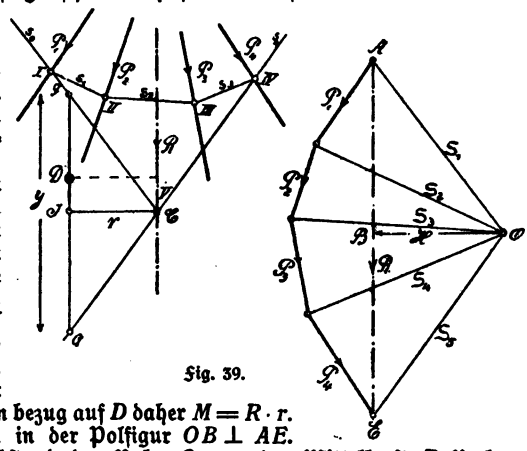


Fig. 39.

Sodann zieht man in der Polfigur $OB \perp AE$. Man nennt diesen Abstand des Poles O von der Mittelkraft R Polentfernung oder Polabstand und bezeichnet ihn allgemein mit H. Nun ist:

$$\triangle CFG \sim \triangle OAE,$$

da die Seiten der Dreiecke einander bezüglich parallel sind. Daher ist:

$$CI : FG = OB : AE \quad \text{oder:} \quad r : y = H : R$$

$$R \cdot r = H \cdot y$$

$$M = H \cdot y.$$

Hieraus folgt der Lehrsatz:

1) Wählt man einen anderen Drehpunkt, so erhält man trotzdem für R denselben Abstand von P_1 (Versuch!).

Das statische Moment einer Kräftegruppe in bezug auf einen beliebigen Drehpunkt ist gleich dem Produkte aus dem Polabstand H und der Strecke y, welche durch die äußersten, die Mittelkraft einschließenden Seilzugseiten auf einer durch den Drehpunkt parallel zur Mittelkraft gezogenen Geraden abgeschnitten wird.

Man pflegt H als Kraft im Kräftemaßstab und y als Länge im Längenmaßstab zu messen, doch erhält man dasselbe Ergebnis, wenn man H als Länge und y als Kraft mißt.

Der Momentensatz wird auch häufig zur Bestimmung des Schwerpunktes von Flächen angewendet. Im allgemeinen soll in diesem Buche die Ermittelung des Schwerpunktes von Linien, Flächen und Körpern als aus der Mathematik bekannt vorausgesetzt und daher nur der eben besprochene Fall erörtert werden.

Zur Ermittelung des Schwerpunktes einer Fläche zerlegt man diese in Einzelflächen, deren Schwerpunkte leicht zu bestimmen sind (Rechtecke, Dreiecke). Diese Einzelflächen faßt man als Gewichte, also als Kräfte auf, welche in den Schwerpunkten der Einzelflächen angreifen. Durch Rechnung oder mit Hilfe des Seilecks sucht man nun zu diesen Einzelkräften die Mittelkraft R, welche natürlich eine Schwerlinie der Gesamtfläche darstellt. In gleicher Weise sucht man eine zweite Schwerlinie auf. Der Schnittpunkt beider Schwerlinien ist der gesuchte Schwerpunkt. Ein einfaches Beispiel zeige den Gang des Verfahrens.

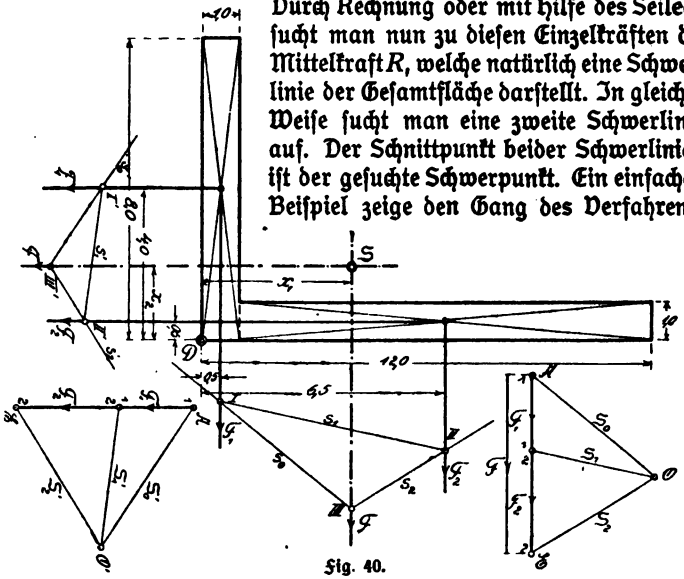


Fig. 40.

Beispiel. Der Schwerpunkt der in ihren Abmessungen in Fig. 40 gegebenen Fläche (ungleichschenkeliges Winkeleisen) ist zu bestimmen.

Lösung. a) Rechnerisch: Man zerlegt die Figur in die Flächen $F_1 = 8{,}0 \cdot 1{,}0 = 8{,}0$ qcm und $F_2 = 11{,}0 \cdot 1{,}0 = 11{,}0$ qcm. Den Drehpunkt wählt man am besten in D, so daß sich für lotrechte Richtung der Kräfte F_1 und F_2 die in Fig. 40 eingeschriebenen Hebelarme ergeben. x_1 sei der Abstand der gesuchten Schwerlinie (Mittelkraft) F von D. Dann ist nach dem Momentensatz das Moment der ganzen Fläche gleich der Summe der Momente der Einzelflächen. Die letzteren drehen in bezug auf D in gleichem Sinne, sind also positiv. Man erhält:

$$F \cdot x_1 = F_1 \cdot 0{,}5 + F_2 \cdot 6{,}5$$

$$(8{,}0 + 11{,}0)\, x_1 = 8{,}0 \cdot 0{,}5 + 11{,}0 \cdot 6{,}5$$

$$x_1 = \frac{4{,}0 + 71{,}5}{19{,}0} = \frac{75{,}5}{19{,}0} = 3{,}97 \text{ cm}.$$

Um die zweite Schwerlinie zu finden, denkt man sich die Richtung von F_1 und F_2, und damit auch die von F um 90° gedreht und erhält, wieder in bezug auf D als Drehpunkt

$$F \cdot x_2 = F_1 \cdot 4{,}0 + F_2 \cdot 0{,}5$$

$$x_2 = \frac{8{,}0 \cdot 4{,}0 + 11{,}0 \cdot 0{,}5}{19{,}0} = \frac{32{,}0 + 5{,}5}{19{,}0} = \frac{37{,}5}{19{,}0} = 1{,}97 \text{ cm}.$$

Nunmehr kann der Schwerpunkt S festgesetzt werden, wie die Figur zeigt.

b) Zeichnerisch: Man wählt einen Kräftemaßstab (hier 1 cm = 8 cm²) und zeichnet für die beiden zueinander senkrechten Flächenrichtungen nach Fig. 40 Polfigur und Seileck. Der Schnittpunkt S der hierbei gewonnenen Schwerlinien (Mittelkräfte F zu F_1 und F_2) ist der gesuchte Schwerpunkt. Durch Messung findet man die Abstände x_1 und x_2 in gleicher Größe wie durch Rechnung.

c) Besondere Fälle. 1. Das Kräftepaar. Unter einem Kräftepaar verstanden wir zwei parallele, gleich große Kräfte von entgegengesetztem Wirkungssinn, deren Mittelkraft gleich Null ist, so daß von ihm keine fortschreitende, sondern nur eine drehende Bewegung hervorgerufen werden kann.

Das statische Moment soll nun für die in Fig. 41 dargestellten, allein möglichen Fälle der Lage des Drehpunktes zu dem Kräftepaar bestimmt werden.

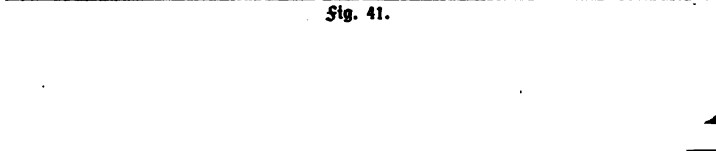


Fig. 41.

Liegt der Drehpunkt D zwischen den beiden Kräften (Fig. 41a), so wird, da beide Kräfte in gleichem Sinne drehen:

$$M = P \cdot m + P \cdot n = P(m + n) = P \cdot a.$$

Liegt D auf einer der beiden Kräfte, so wird das Moment dieser Kraft $= 0$ und man erhält $M = P \cdot a$ (Fig. 41b).

Liegt D außerhalb der beiden Kräfte (Fig. 41c), so drehen sie in verschiedenem Sinne, und es wird:

$$M = P \cdot m - P \cdot n = P(m - n) = P \cdot a.$$

Das statische Moment eines Kräftepaares ist daher stets gleich dem Produkt aus einer der beiden Kräfte und ihrem senkrechten Abstande von der anderen Kraft.

Ein Kräftepaar kann nur durch ein Kräftepaar, aber nie durch eine Einzelkraft ersetzt oder aufgehoben werden. Das ersetzende Kräftepaar muß denselben Drehsinn und ein gleich großes Drehmoment, das aufhebende ein gleich großes Drehmoment, aber entgegengesetzten Drehsinn besitzen.

Wirken auf einen Körper mehrere Kräftepaare, so ist Gleichgewicht vorhanden, wenn die algebraische Summe der Drehmomente gleich Null ist.

2. Einzelkraft und Kräftepaar. Häufig kommt in der Statik der Fall vor, daß auf einen Körper eine Einzelkraft P und ein Kräftepaar mit dem Moment $Q \cdot a$ wirkt. Nach dem eben Gesagten kann letzteres durch ein anderes Kräftepaar mit dem Moment $P \cdot b = Q \cdot a$ ersetzt werden, woraus man erhält $b = \frac{Q \cdot a}{P}$.

Dieses neue Moment $P \cdot b$ kann man nun so verschieben, daß der Arm b senkrecht zur gegebenen Kraft P steht und mithin die eine Kraft P des Kräftepaares in die Richtung der gegebenen Kraft P fällt. Diese beiden Kräfte heben sich dann gegenseitig auf, und die Wirkung einer solchen Kräftegruppe ist dieselbe, als wenn nur eine Kraft P im Abstande b vom Drehpunkt wirken würde. Daraus folgt:

Wirkt auf einen Körper eine Einzelkraft und ein Kräftepaar, so lassen sich beide zu einer Einzelkraft vereinigen, welche ebenso groß ist wie die gegebene Kraft, aber parallel zu letzterer um ein gewisses Maß b verschoben wird.

Umgekehrt kann natürlich auch stets eine Einzelkraft in ein Kräftepaar und eine zweite Einzelkraft, welche zu der gegebenen Kraft par-

allel ist und dieselbe Größe besitzt, zerlegt werden (bei der exzentrischen Druckbeanspruchung wird hiervon Anwendung gemacht werden).

d) Standsicherheit. Aus der Naturlehre ist allgemein bekannt, daß ein Körper nur dann im Ruhezustand sein kann, wenn sein Schwerpunkt unterstützt ist. Man kann aber jeden Körper (etwa einen Stuhl) durch Drehung so weit aus seiner Lage bringen, daß der Schwerpunkt außerhalb des Unterstützungspunktes, der Unterstützungsgeraden oder der Unterstützungsfläche zu liegen kommt und damit der Körper umfällt. In folgendem soll nur der Fall erörtert werden, bei welchem der Schwerpunkt des Körpers durch eine Fläche unterstützt wird, wie das bei Baukörpern der Fall ist.

Der Baukörper muß imstande sein, durch sein Eigengewicht dem Einfluß anderer Kräfte, z. B. Winddruck, Erddruck, Wasserdruck und dgl., die ihn umzustürzen oder fortzuschieben suchen, zu widerstehen. Ein Fortschieben des Körpers wird meist durch die auf der Unterlage auftretenden Reibungswiderstände verhindert. Den Widerstand, welchen der Körper dem Umkanten entgegensetzt, nennt man Standsicherheit (Stabilität), die Kante, um welche das Kanten erfolgt, Kippkante.

Betrachtet man den Körper in Fig. 42 (Mauer), so erkennt man sofort, daß die Kraft D den Körper um den Punkt A zu kanten sucht. Ihr Drehmoment ist links drehend und hat die Größe $D \cdot d$. Es heißt Kippmoment oder Umsturzmoment. Die lotrecht wirkenden Kräfte (Eigengewicht und etwaige senkrechte Belastung) suchen den Körper ebenfalls um den Punkt A, aber rechts zu drehen, wobei der Körper fest gegen seine Unterlage gedrückt und damit ein Maß für die Standfähigkeit des Körpers gegeben wird. Man nennt dieses Moment von der Größe $G \cdot b$ daher Standsicherheitsmoment (Stabilitätsmoment). Es wird also um so größer, je größer die Entfernung der lotrechten Kraft von der Kippkante ist, und je größer Eigengewicht und Belastung werden. Ist Gleichgewicht vorhanden, so muß sein:

$$G \cdot b = D \cdot d.$$

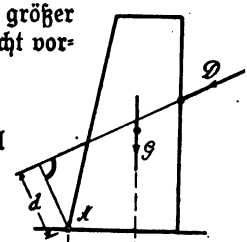


Fig. 42.

Dies reicht aber zur Standsicherheit nicht aus. Soll letztere vorhanden sein, so muß:

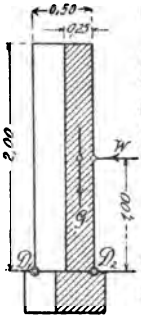
$$G \cdot b > D \cdot d$$

sein. Ist dagegen $G \cdot b < D \cdot d$, so tritt Kanten ein. Für die Praxis wird verlangt, daß das Stand-

sicherheitsmoment mindestens das 1,5 fache des Umsturzmomentes beträgt, also:

$$G \cdot b > 1{,}5 D \cdot d.$$

Wir werden später sehen, daß zur Standsicherheit eines solchen Körpers aber noch andere Bedingungen, als die eben besprochene, erfüllt sein müssen.



Beispiel. Die in Fig. 43 in ihren Abmessungen gegebene Mauer ist auf ihre Standsicherheit zu untersuchen. Die Mauer werde vom Winddruck, der in der Mitte der Höhe angreift, mit 115 kg/m² belastet. Sie ist in Abständen von 2,0 m von Mitte zu Mitte mit Strebepfeilern auf einer Seite versehen. Das Gewicht des Mauerwerkes betrage 2400 kg/m³.

Lösung. Die Größe des Windruckes ist:

$$W = 2{,}0 \cdot 2{,}0 \cdot 125 = 500 \text{ kg}.$$

Wirkt der Winddruck W in der in der Figur angegebenen Weise, so sucht er die Mauer um die Kante des Strebepfeilers zu kanten, der Drehpunkt ist also im Punkte D_1 anzunehmen. Würde der Wind auch von der anderen Seite angreifen, so wäre D_2 als Drehpunkt zu wählen. In beiden Fällen ist der Hebelarm von W 1,0 m, mithin das Umsturzmoment:

$$M_u = 500 \cdot 100 = 50000 \text{ kgcm}.$$

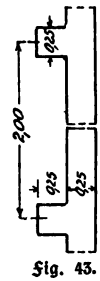


Fig. 43.

Das Standsicherheitsmoment wird für den Drehpunkt D_1:

$$M_s = \Sigma P \cdot p$$
$$= 2400 \cdot 2{,}0 \cdot \left[0{,}25 \cdot 2{,}0 \cdot \left(0{,}25 + \frac{0{,}25}{2}\right) + 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot \frac{0{,}25}{2}\right]$$
$$= 937{,}5 \text{ kgm} = 93750 \text{ kgcm}.$$

Mithin ist mehr als $1\frac{1}{2}$ fache Sicherheit vorhanden. Für D_2 als Drehpunkt erhält man:

$$M_s = 2400 \cdot 2{,}0 \cdot \left[0{,}25 \cdot 2{,}0 \cdot \frac{0{,}25}{2} + 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot \left(0{,}25 + \frac{0{,}25}{2}\right)\right]$$
$$= 301{,}65 \text{ kgm} = 30165 \text{ kgcm}.$$

Also erreicht M_s noch nicht einmal die Größe von M_u, mithin würde die Mauer kanten, wenn sie auch nach dieser Seite den Winddruck aufnehmen sollte. Sie müßte daher auch auf der anderen Seite mit Strebepfeilern versehen werden. Letztere dienen mithin dazu, die Kippkante weiter nach vorn zu schieben und dadurch den Hebelarm und also auch das Standsicherheitsmoment zu vergrößern.

VII. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen.

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit ein Bauwerk im Zustande der Ruhe sich befinde, sind in den bisherigen Erläuterungen schon aufgestellt worden, sollen aber zur größeren Übersichtlichkeit hier nochmals zusammengestellt werden.

a) Rechnerische Bedingungen. Beliebig viele in einer Ebene auf einen Körper wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn

1. die algebraische Summe ihrer sämtlichen wagerechten Seitenkräfte gleich Null ($\Sigma H = 0$),
2. die algebraische Summe ihrer sämtlichen senkrechten Seitenkräfte gleich Null ($\Sigma V = 0$),
3. die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Drehpunkt gleich Null ist ($\Sigma M = 0$).

Sind diese Bedingungen erfüllt, so kann weder eine fortschreitende (Bedingung 1 und 2), noch eine drehende Bewegung (Bedingung 3) eintreten.

b) Zeichnerische Bedingungen. Eine beliebige Anzahl in einer Ebene liegender Kräfte befindet sich im Gleichgewicht, wenn sie sich zu einem geschlossenen Kraftek mit gleichem Umfahrungssinn zusammensetzen lassen und zwischen ihren Richtungen sich ein in sich schließendes Seileck zeichnen läßt.

C. Die Anwendung der statischen Gesetze auf die Baukonstruktionen.

1. Allgemeines über Träger und deren Auflagerung.

Ein Träger ist ein Bauteil, bei dem die auftretende Belastung ausschließlich oder doch zum größten Teile rechtwinkelig zur Längsachse bzw. zur Verbindungslinie der Stützpunkte (Auflager) des Bauteiles wirkt. Die Belastungen sind in der Regel lotrecht, daher liegt die Längsachse der Träger meist wagerecht oder weicht nur wenig von der Wagerechten ab. Unter einem Träger versteht man in erster Linie einen Balkenträger (gerade Längsachse) aus Holz oder Eisen, doch zählen auch Dachbinder, Spreng- und Hängewerke (gebrochene Längsachse), sowie Gewölbe und eiserne Bogenträger (gekrümmte Längsachse) zu ihnen. Balkenträger sind Träger, bei denen bei lotrechter Belastung nur lotrechte Auflagerdrücke entstehen, während bei Spreng- und Hänge-

werken (vgl. Fig. 35) bei lotrechter Belastung schiefe Stützendrücke auftreten, die jedoch in lot- und wagerechte Seitendrücke zerlegt werden können.

Die Auflagerung der Träger kann auf zwei oder mehreren Stützen erfolgen. Ist ersteres der Fall, so nennt man den Träger einen einfachen Träger, sonst einen fortlaufenden, durchgehenden (kontinuierlichen Träger). Der Träger liegt auf seinen Stützen entweder frei auf, oder er wird auf der Stütze auf eine größere Strecke festgehalten, in welchem Falle man ihn eingespannt nennt. Ein eingespannter Träger ist auch der Freiträger, dessen eines Ende keine Unterstützung besitzt (Balkonträger). Zuweilen besitzt ein Träger auch ein über jede oder nur eine Stütze hinausragendes Ende, man heißt ihn dann Kragträger mit zwei freien Enden, bzw. Kragträger mit einem freien Ende.

Kann man mit Hilfe der drei allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen aus der Belastung die unbekannten Stützendrücke bestimmen, wie es beim Träger auf zwei Stützen der Fall ist, so nennt man den Träger statisch bestimmt, andernfalls statisch unbestimmt (durchgehender Träger).

Die Auflagerung erfolgt entweder fest oder beweglich.

Feste Auflager müssen jede lot- oder wagerechte Verschiebung des Punktes, in dem die Stützung stattfindet, verhindern. Der auftretende Stützen- oder Auflagerdruck kann daher eine beliebige Richtung in der Trägerebene besitzen und demnach sowohl eine lotrechte wie eine wagerechte Seitenkraft ergeben (Fig. 44).

Bewegliche Auflager finden Anwendung, um erheblichere Längenänderungen des Trägers infolge Temperaturausdehnung zu gestatten, und ermöglichen eine Verschiebung des zu stützenden Trägerpunktes auf vorgeschriebener Bahn. Beim beweglichen Auflager nimmt man eine reibungslose Berührung der Oberfläche des Trägers und des Auflagers an (Rollenlager). Läßt die Stützung nur reibungslose wagerechte Bewegungen zu, so muß der auftretende Auflagerdruck lotrecht gerichtet sein (Fig. 45).

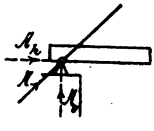


Fig. 44.

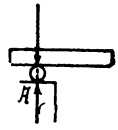


Fig. 45.

Bei beliebiger Belastung, wie sie etwa bei einem Dachbinder durch den Winddruck W, der senkrecht zur geneigten Dachfläche angenommen werden kann, auftritt, erfahren die Unterstützungspunkte bestimmte

Drücke (Fig. 46). Da das eine Auflager als Rollenlager ausgebildet wird, so muß nach dem eben Gesagten der Auflagerdruck A lotrecht gerichtet sein. Soll Gleichgewicht herrschen, so müssen sich die Auflagerdrücke A und B und der Winddruck W in einem Punkte C schneiden. Man hat daher B und W in C zum Schnitt zu bringen. Die Kraft A muß natürlich auch durch den Stützpunkt A gehen, man findet also ihre Richtung, indem man den Schnittpunkt C mit A verbindet. Die Größe von A und B erhält man aus dem Kräftedreieck, B ist dann noch in seine lotrechte und wagerechte Seitenkraft am Auflager zu zerlegen.

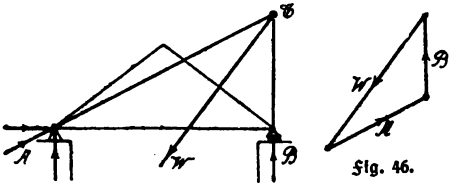


Fig. 46.

Hinsichtlich der Belastung der Träger unterscheidet man:

1. Einzellasten. Die Lasten greifen an einem oder mehreren Punkten an (z. B. Kappenträger auf einem Unterzug).

2. Gleichmäßig verteilte Belastung. Die Belastung ist auf die ganze Länge des Balkens in gleicher Weise verteilt (z. B. die Belastung eines Zimmerbalkens durch die Nutzlast, oder eines Trägers durch eine über ihn ununterbrochen fortlaufende Mauer).

3. Streckenbelastung. Nur einzelne Strecken des Balkens tragen eine gleichmäßige Belastung (z. B. die Belastung eines Trägers durch eine von einer Türöffnung unterbrochene Mauer).

4. Gemischte Belastung. Mehrere oder alle der unter 1 bis 3 genannten Belastungen treten gleichzeitig auf.

Die Belastung kann auch bleibend und veränderlich oder beweglich sein (Eigengewicht der Träger, auf Trägern ruhende Mauern liefern bleibende, also stets vorhandene Lasten; Raddrücke von Fahrzeugen, Menschengedränge auf Brücken, Schnee- und Winddrucke sind veränderliche Lasten).

Belastungsfeld. Zur besseren Verfolgung der Kraftwirkungen, teilt man den Träger in Belastungsfelder ein, d. h. in Strecken, auf welchen die Art und Größe der Belastung die gleiche ist. Eine Einzellast stellt ein Belastungsfeld von unendlich kleiner Länge dar.

Querkraft und Biegungsmoment. Wie wir bereits sahen, werden bei einem Träger durch lotrechte Belastung Stützendrücke her-

vorgerufen, damit Gleichgewicht herrscht. Die äußeren Kräfte aber suchen auch den Träger durchzubiegen, sowie in ihrer Wirkungslinie die einzelnen Trägerquerschnitte gegeneinander zu verschieben, mithin den Träger quer zu seiner Längsachse abzuscheren. Daher ergibt sich für jeden Trägerquerschnitt eine Kraft, die den linken Trägerteil gegen den rechten zu verschieben sucht. Diese Kraft heißt Querkraft. Ferner tritt aber auch für jeden Trägerquerschnitt ein statisches Moment auf, welches den linken Trägerteil gegen den rechten zu verbiegen sucht und Biegungsmoment heißt.

Durch diese Beanspruchungen werden innere Kräfte hervorgerufen, die mit den äußeren Kräften sich im Gleichgewicht befinden müssen; die Trägerabmessungen müssen so gewählt werden, daß der Träger die Einwirkung dieser inneren Kräfte mit Sicherheit auf die Dauer ertragen kann.

Die Biegungsmomente sind, wie aus einfacher Überlegung zu erkennen, nicht für jeden Querschnitt des Trägers gleich groß. Man muß daher zur richtigen Ermittlung der Abmessungen eines Trägers das größte Biegungsmoment (Maximalmoment $= M_{max}$) bestimmen. In dem Querschnitt, in welchem es auftritt, ist der Bruch des Trägers am meisten zu befürchten; er heißt daher der gefährliche Querschnitt.

II. Die Bestimmung der Auflagerdrücke, des Biegungsmomentes und der Querkräfte eines Trägers auf zwei Stützen mit einer oder mehreren Einzellasten.

Die hier, wie auch in den folgenden Abschnitten zu behandelnden Träger erfahren nur lotrechte Belastungen, so daß auch die Richtung der beiden Auflagerdrücke lotrecht ist. Da also nur diese beiden Drücke A und B zu ermitteln sind, hat man nur zwei Unbekannte festzulegen. Wagerechte Kräfte kommen nicht vor, mithin genügt die Erfüllung der beiden Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma M = 0$ und $\Sigma V = 0$.

Ermittelung der Auflagerdrücke. a) Rechnerisches Verfahren. Die Lösung der Aufgabe wird am besten sofort an einem Beispiele gezeigt. Ein Träger sei nach Fig. 47 mit den Einzellasten $P_1 = 2000$ kg, $P_2 = 3000$ kg, $P_3 = 1000$ kg und $P_4 = 2000$ kg belastet.

Da die beiden Auflagerdrücke und die entgegengesetzt wirkenden Kräfte P nach der Bedingung $\Sigma V = 0$ im Gleichgewicht sein müssen, so muß sein:

$$A + B - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = 0$$

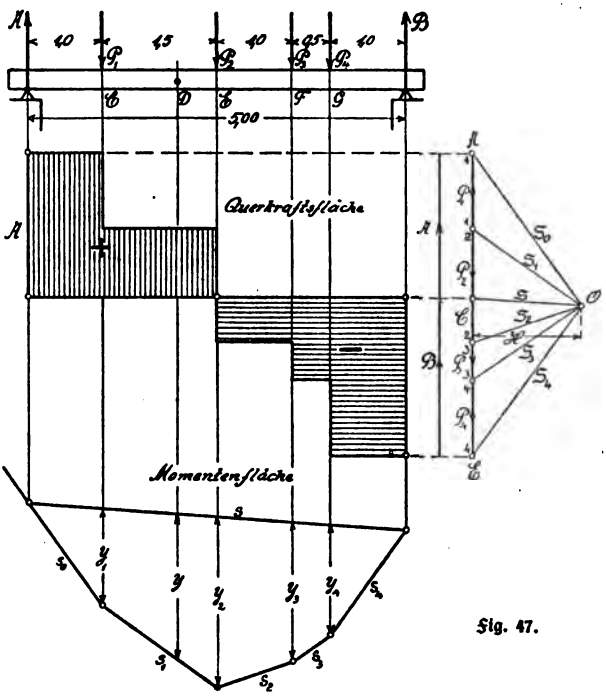


Fig. 47.

also: $A + B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$

oder allgemein: $A + B = \Sigma P$

mithin: $A + B = 2000 + 3000 + 1000 + 2000 = 8000$ kg.

Zur Beſtimmung von A und B benutzt man den Momentenſatz. Um aber eine Gleichung mit nur einer Unbekannten zu erhalten, verlegt man den Drehpunkt zur Beſtimmung von A nach B und zur Beſtimmung von B nach A, da dann jedesmal der Hebelarm der einen Unbekannten und damit auch deren Moment gleich Null wird. Beſtimmt man nun zunächſt den Auflagerdruck A, ſo ſind die Hebelarme ſämtlicher Kräfte auf den Punkt B als Drehpunkt zu beziehen. Der Hebelarm von P_1 mißt demnach $1{,}5 + 1{,}0 + 0{,}5 + 1{,}0 = 4{,}0$ m, derjenige von P_2 entſprechend 2,5 m, der

von P_3 1,5 m und von P_4 1,0 m. Zur Erfüllung der Bedingung $\Sigma M = 0$ muß daher sein (unter Berücksichtigung, daß das Moment von B mit dem Hebelarm 0 nicht in Betracht kommt):

$$A \cdot 500 - P_1 \cdot 400 - P_2 \cdot 250 - P_3 \cdot 150 - P_4 \cdot 100 = 0$$

oder: $$A \cdot 500 = P_1 \cdot 400 + P_2 \cdot 250 + P_3 \cdot 150 + P_4 \cdot 100$$

$$A = \frac{2000 \cdot 400 + 3000 \cdot 250 + 1000 \cdot 150 + 2000 \cdot 100}{500}$$

$$A = 3800 \text{ kg}.$$

In gleicher Weise erhält man für A als Drehpunkt (Hebelarme = Abstände der Kräfte von A!):

$$B \cdot 500 - P_1 \cdot 100 - P_2 \cdot 250 - P_3 \cdot 350 - P_4 \cdot 400 = 0$$

$$B = \frac{2000 \cdot 100 + 3000 \cdot 250 + 1000 \cdot 350 + 2000 \cdot 400}{500}$$

$$B = 4200 \text{ kg}.$$

Die Probe mit Hilfe der Beziehung $A + B = \Sigma P$ gibt:

$$3800 + 4200 = 2000 + 3000 + 1000 + 2000$$

$$8000 = 8000.$$

Die Auflagerdrücke sind also richtig ermittelt. Man erkennt aber, daß man B auch hätte finden können aus:

$$B = \Sigma P - A = 8000 - 3800 = 4200 \text{ kg}.$$

Doch empfiehlt es sich, namentlich für Ungeübtere, auch zur Ermittelung von B die Momentengleichung aufzustellen und mit der Beziehung $A + B = \Sigma P$ die Probe zu machen, ob man richtig gerechnet hat.

b) Zeichnerisches Verfahren. Die Lösung der Aufgabe ist bereits unter B, IV, b, 2 besprochen. Man zeichnet, wie in Fig. 47 angegeben, unter Annahme eines beliebigen Poles O die Polfigur und sodann das Seileck. Eine Parallele durch O zur Schlußlinie s des Seileckes schneidet auf AE die Strecken $AC = A$ und $CE = B$ ab. Die Stützenwiderstände A und B halten den gegebenen Lasten P das Gleichgewicht, da Krafteck und Seileck geschlossen sind. Die Festlegung der Lage der Mittelkraft R ist nicht notwendig.

Bestimmung des Biegungsmomentes und der Querkraft. a) Rechnerisches Verfahren. Zur Ermittelung des an einer beliebigen Stelle des Trägers auftretenden Biegungsmomentes und der daselbst auftretenden Querkraft denkt man sich den Träger an der betreffenden Stelle D lotrecht durchschnitten und betrachtet zunächst das linke Trägerstück, das man zweckmäßig nochmals besonders herauszeichnet (Fig. 48). Die äußeren Kräfte hielten sich vor der Trennung das Gleichgewicht, ebenso befanden sich an jeder Stelle des Trägers die auftretenden äußeren

und inneren Kräfte im Gleichgewicht. Durch Störung des Zusammenhanges des Trägers an der Schnittstelle wird natürlich auch der vorhandene Gleichgewichtszustand gestört. Will man ihn jedoch aufrecht erhalten, so muß man an der Schnittstelle solche Kräfte anbringen, welche die gleiche Wirkung hervorrufen wie zuvor die inneren Kräfte. Die Ermittelung dieser inneren Widerstandskräfte lehrt die Festigkeitslehre.

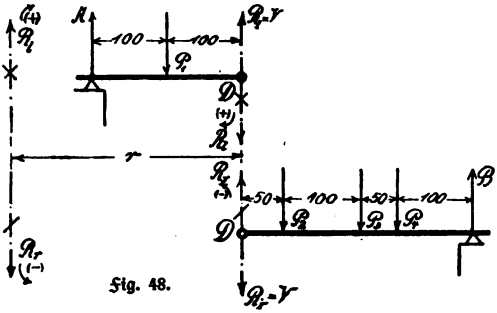


Fig. 48.

Um sich die Wirkung der äußeren Kräfte klar zu machen, ermittelt man die Mittelkraft R_l der am linken Trägerstück wirkenden Kräfte nach Größe, Lage, Richtung und Sinn in gleicher Weise, wie auf S. 30 gezeigt wurde. Die Größe von R_l folgt aus:

$$R_l = A - P_1 = 3800 - 2000 = 1800 \text{ kg}.$$

Da das Moment der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe der Momente der Einzelkräfte ist, so erhält man den Hebelarm r in bezug auf den Drehpunkt D aus der Gleichung:

$$R_l \cdot r = A \cdot 200 - P_1 \cdot 100$$

$$r = \frac{3800 \cdot 200 - 2000 \cdot 100}{1800} = 3{,}11 \text{ m}.$$

Man fügt nun in D zwei gleich große, aber einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte $= R_l$ hinzu, wodurch an der ursprünglichen Kraftwirkung nichts geändert wird, da sie sich ja gegenseitig aufheben. Die ursprünglich gefundene Mittelkraft R_l und die in D in entgegengesetztem Sinne wirkende Kraft R_l bilden nun ein Kräftepaar mit dem rechts drehenden Moment:

$$M_l = R_l \cdot r,$$

welches also den linken Trägerteil an der Schnittstelle gegen den rechten zu verbiegen sucht und daher das Biegungsmoment für den Punkt D ist. Es ist gleich der algebraischen Summe der Momente aller am linken Trägerteil wirkenden Einzelkräfte (A und P_1).

Ferner wirkt (von oben nach unten) im Punkte D noch die Hilfskraft R_l quer zur Längsachse des Trägers nach oben und sucht das abgeschnittene linke Trägerstück in ihrem Wirkungssinne, also nach oben, zu verschieben, vor Führung des Schnittes bei D den Träger also daselbst durchzuscheren. Man nennt diese Kraft darum auch Scherkraft, oder häufiger noch Querkraft (Transversalkraft) und pflegt sie mit V zu bezeichnen.

Hieraus geht zur Erklärung der Begriffe „Biegungsmoment" und „Querkraft" folgendes hervor:

Das Biegungsmoment für einen bestimmten Trägerabschnitt ist dasjenige Kraftmoment, welches den linken Trägerteil gegen den rechten an der Schnittstelle zu verbiegen sucht. Das Biegungsmoment ist gleich der algebraischen Summe der Momente aller am abgeschnittengedachten Trägerteil wirkenden äußeren Kräfte in bezug auf den Schwerpunkt des Querschnitts der Schnittstelle als Drehpunkt.

Die Querkraft für einen bestimmten Trägerabschnitt ist diejenige Kraft, welche den linken Trägerteil gegen den rechten in ihrem Wirkungssinne im betrachteten Querschnitt zu verschieben sucht. Die Querkraft ist gleich der Mittelkraft aller am abgeschnitten gedachten Trägerteil wirkenden äußeren Kräfte.

Betrachtet man das rechte Trägerstück (Fig. 48), so erhält man für die Größe der Mittelkraft der an ihn wirkenden Kräfte:

$$R_r = B - P_2 - P_3 - P_4$$

$$R_r = 4200 - 3000 - 1000 - 2000 = -1800 \text{ kg}.$$

R_r hat also dieselbe Größe wie R_l, ist jedoch entgegengesetzt gerichtet. Für D als Drehpunkt erhält man:

$$R_r \cdot r = B \cdot 300 - P_2 \cdot 50 - P_3 \cdot 150 - P_4 \cdot 200$$

$$r = \frac{4200 \cdot 300 - 3000 \cdot 50 - 1000 \cdot 150 - 2000 \cdot 200}{-1800} = -3{,}11 \text{ m}.$$

Das Vorzeichen gibt an, daß R auf der dem rechten Trägerstück abgekehrten Seite liegt; da außerdem r denselben Wert hat, wie für das linke Trägerstück, so hat R_r dieselbe Lage, aber entgegengesetzten Sinn wie R_l. Da beide in dieselbe Gerade fallen, so heben sie sich auf, und es ist Gleichgewicht vorhanden. Da $R_l = R_r$ und r konstant, so folgt:

$$R_l \cdot r = R_r \cdot r \quad \text{oder:} \quad M_l = M_r.$$

Die Momente der Mittelkräfte sind für beide Trägerstücke in bezug auf einen **beliebigen** Drehpunkt also gleich, doch ist M_r ein links drehendes Moment. Die Momente haben mithin entgegengesetzten Drehsinn, aber gleiche Größe und halten sich daher im Gleichgewicht.

Die in D am rechten Trägerstück verbleibende, nach unten gerichtete Hilfskraft R_r ist die Querkraft für das rechte Trägerstück und sucht dieses nach unten zu verschieben. Sie ist eben so groß, aber entgegengesetzt gerichtet, wie die Querkraft R_l für das linke Trägerstück und befindet sich daher mit ihr im Gleichgewicht.

Zur Ermittelung des Biegungsmomentes und der Querkraft für einen beliebigen Querschnitt ist es daher gleichgültig, ob man das Trägerstück links von der Schnittstelle oder dasjenige rechts von ihr betrachtet. Zweckmäßig wählt man das einfachere Trägerstück, also das, an welchem die wenigsten Kräfte wirken.

Für den Fall in Fig. 47 erhält man als Biegungsmoment demnach:

$$M = R \cdot r = 1800 \cdot 311 = 559800 \text{ kgcm}$$

und als Querkraft: $V = R_l = R_r = 1800$ kg.

Würde man unmittelbar hinter A den lotrechten Schnitt führen, so müßte nach obiger Erklärung für die Querkraft werden:

$$V_1 = A = +3800 \text{ kg}.$$

Diesen Wert hat die Querkraft an jeder Stelle bis zum Angriffspunkt von P_1, also über das ganze erste Belastungsfeld. Für sämtliche Belastungsfelder erhält man demnach für jede beliebige Schnittstelle des betreffenden Feldes:

1. Belastungsfeld: $V_1 = A = +3800$ kg
2. „ $V_2 = A - P_1 = 3800 - 2000 = +1800$ kg
3. „ $V_3 = A - P_1 - P_2 = 3800 - 2000 - 3000 = -1200$ kg
4. „ $V_4 = A - P_1 - P_2 - P_3 = 3800 - 2000 - 3000 - 1000 = -2200$ kg
5. „ $V_5 = A - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = 3800 - 2000 - 3000 - 1000 - 2000 = -4200 \text{ kg} = B$.

Die Querkraft ist im 3. Belastungsfeld negativ, der Übergang muß also im Angriffspunkte E von P_3 stattfinden. Wir werden gleich sehen, welche Bedeutung dies hat.

Denkt man sich einen lotrechten Schnitt zwischen A und P_1 in einer Entfernung $= 1$ cm von A geführt, so würde für den Drehpunkt im Schwerpunkte des Querschnittes an der Schnittstelle das Biegungsmoment des linken Trägerstückes:

$$M = A \cdot 1{,}0 = 3800 \cdot 1{,}0 = 3800 \text{ kgcm},$$

für einen Schnitt in der Entfernung = 2 cm von A aber:

$$M = A \cdot 2{,}0 = 3800 \cdot 2{,}0 = 7600 \text{ kg}$$

alſo doppelt ſo groß.

Man erkennt ſofort, daß das Moment proportional mit der Entfernung wächſt, um ſchließlich bei C einen gewiſſen Höchſtwert zu erreichen. Von da ab muß infolge des Hinzutretens der Kraft P_1 natürlich eine neue Momentengleichung aufgeſtellt werden, doch wird, da bis E keine weitere Kraft angreift, das Moment bis E wieder proportional wachſen uſf. Es wird daher genügen, das Moment nur für diejenigen Punkte als Drehpunkte zu beſtimmen, in denen die Einzellaſten angreifen.

Man erhält dementſprechend:

Für Drehpunkt A (Hebelarm = 0) (Fig. 49):

$$M_A = A \cdot 0 = 3800 \cdot 0 = 0.$$

Für Drehpunkt C (Abb. 50):

$$M_1 = A \cdot 100 - P_1 \cdot 0 = 3800 \cdot 100 - 2000 \cdot 0 = 380000 \text{ kgcm}.$$

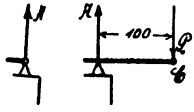


Fig. 49.

Fig. 50.

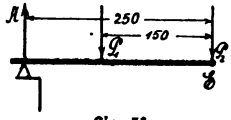


Fig. 51.

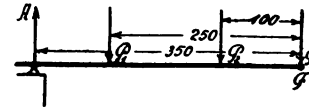


Fig. 52.

Für Drehpunkt E (Abb. 51):

$$M_2 = A \cdot 250 - P_1 \cdot 150 - P_2 \cdot 0\ ^{1})$$

$$M_2 = 3800 \cdot 250 - 2000 \cdot 150 = 650000 \text{ kgcm}.$$

Für Drehpunkt F (Abb. 52):

$$M_3 = A \cdot 350 - P_1 \cdot 250 - P_2 \cdot 100.$$

$$M_3 = 3800 \cdot 350 - 2000 \cdot 250 - 3000 \cdot 100 = 530000 \text{ kgcm}.$$

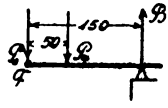


Fig. 53.

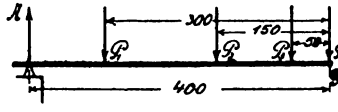


Fig. 54.

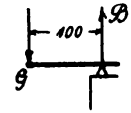


Fig. 55.

Einfacher erhält man unter Benutzung des rechten Trägerſtückes (Abb. 53):

$$M_3 = B \cdot 150 - P_4 \cdot 50$$

$$= 4200 \cdot 150 - 2000 \cdot 50 = 530000 \text{ kgcm}.$$

1) Dieſes Moment fällt aus der Rechnung heraus und ſoll daher in Zukunft nicht mehr geſchrieben werden.

Für Drehpunkt G (Abb. 54):

$$M_4 = A \cdot 400 - P_1 \cdot 300 - P_2 \cdot 150 - P_3 \cdot 50$$

$$M_4 = 3800 \cdot 400 - 2000 \cdot 300 - 3000 \cdot 150 - 1000 \cdot 50 = 420\,000 \text{ kgcm}.$$

Einfacher unter Benutzung des rechten Trägerstückes (Abb. 55):

$$M_4 = B \cdot 100 = 4200 \cdot 100 = 420\,000 \text{ kgcm}.$$

Für B wird entsprechend wie bei A:

$$M_B = B \cdot 0 = 0.$$

Man erkennt hieraus, daß das größte Biegungsmoment bei E auftritt, mithin an derselben Stelle, wo die Querkraft $V = 0$ wird, also am kleinsten ist und aus dem Positiven ins Negative übergeht. Umgekehrt sieht man, daß das Moment am kleinsten am Auflager ist, wo die Querkraft ihren Höchstwert hat. Aus diesen Betrachtungen läßt sich daher der Satz aufstellen:

Das größte Biegungsmoment tritt an der Stelle auf, wo die Querkraft gleich Null ist oder den Wert Null durchläuft.

Wir sahen, daß die Querkraft an jeder Stelle gleich der Mittelkraft aller auf das betrachtete Trägerstück wirkenden Kräfte ist. Von diesen ist nur der Auflagerdruck nach oben gerichtet, während die belastenden Kräfte entgegengesetzt gerichtet sind. Daraus folgt, daß die Querkraft da gleich Null wird, wo die das eine Balkenstück belastenden Kräfte gleich dem zugehörigen Auflagerdruck werden. Daher gilt der Satz:

Der gefährliche Querschnitt teilt den Balken so in zwei Teile, daß die auf jedem Teil ruhende Belastung gleich dem zugehörigen Auflagerdruck ist.

Dieser Satz gilt für jede Belastung, also nicht nur für Einzellasten. Er liefert auch eine einfache Regel, um die Stelle des gefährlichen Querschnittes durch Kopfrechnung zu ermitteln. Man muß nur von links nach rechts oder umgekehrt die belastenden Kräfte bis zu der Stelle zusammenzählen, an welcher sie die Größe des zugehörigen Auflagerdruckes erreichen oder überschreiten. Da bei Einzellasten dies nur an einer Stelle eintreten kann, wo eine Einzelkraft wirkt, so folgt weiter:

Der gefährliche Querschnitt liegt bei Belastung durch Einzellasten stets unter einer Einzellast.

b) Zeichnerisches Verfahren. Man denkt sich auch hierbei den Träger an einer beliebigen Stelle D durchschnitten und ermittelt nun nach

Fig. 56 zunächst für das linke Trägerstück mit Hilfe der Polfigur in Fig. 47 und des Seilecks die Mittelkraft R_l. Ebenso verfährt man für das rechte Trägerstück und findet so $R_r = R_l$ nach Größe, Lage und Richtung, aber entgegengesetzten Sinnes. Durch Messung von $r = 3{,}11$ m und $R = A - P_1 = B - P_1 - P_2 - P_3 = 1{,}80$ cm $= 1800$ kg, ergibt sich $M = R \cdot r = 1800 \cdot 311 = 559800$ kgcm wie beim rechnerischen Verfahren. Bezüglich des Biegungsmomentes und der Querkraft kann man nun dieselben allgemeinen Betrachtungen anstellen, wie es beim rechnerischen Verfahren geschah, indem man in D wieder die gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Hilfskräfte R anbringt.

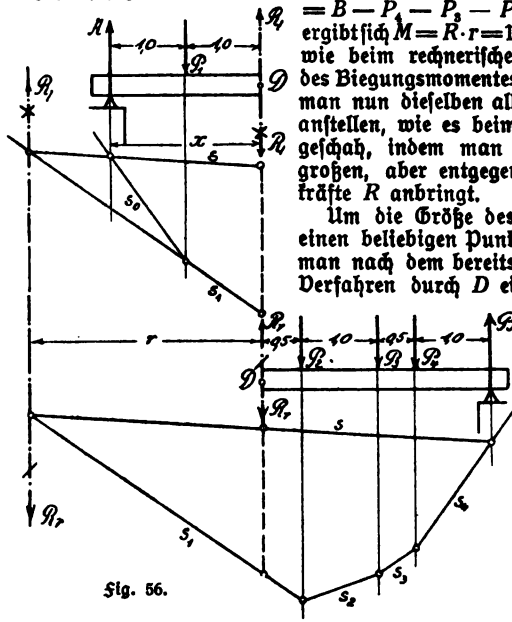


Fig. 56.

Um die Größe des Biegungsmomentes für einen beliebigen Punkt D zu bestimmen, zieht man nach dem bereits auf S. 31 beschriebenen Verfahren durch D eine Parallele zur Mittelkraft (Fig. 47). Die zu den gegebenen Kräften gehörigen, die Mittelkraft einschließenden, äußeren Seileckseiten (hier s_1 und die Schlußlinie s) schneiden auf dieser Parallelen die Strecke y ab. Nach dem auf S. 31 Gesagten ist daher das Biegungsmoment für D:

$$M_D = H \cdot y.$$

Da hier $H = 1{,}45$ cm, also $H = 1{,}45 \cdot 2000 = 2900$ kg und $y = 193$ cm, so folgt $M_D = 2900 \cdot 193 = 559700$ kgcm, was mit dem früher gefundenen rechnerischen Ergebnis fast genau übereinstimmt.

H ist, einmal angenommen, eine unveränderliche Größe. M ändert sich daher nur mit y, so daß die lotrechten Abschnitte y unmittelbar die Momente darstellen. Man nennt daher die von der Schlußlinie und den Seileckseiten begrenzte Fläche die Momentenfläche. Man erkennt aus ihrem Verlaufe, wie oben schon durch die Rechnung, daß die Momente zwischen je zwei Lastpunkten proportional zu- bzw. abnehmen und in den Lastpunkten jeweils einen gewissen Höchstwert erreichen, und daß daher auch das größte Biegungsmoment unter einem Lastpunkte liegen muß, nämlich da, wo y am größten ist.

In unserem Falle tritt M_{max}, wie schon die Rechnung zeigte unter P_2 auf, da y hier am größten ist. Man mißt im Punkte E $y_2 = y_{max} = 224$ cm (Fig. 47), mithin wird:

$$M_{max} = H \cdot y_{max} = 2900 \cdot 224 = 650\,000 \text{ kgcm},$$

wie oben auch durch Rechnung gefunden wurde.

Wir sahen bereits bei dem rechnerischen Verfahren, daß die Querkraft innerhalb eines Belastungsfeldes bei Belastung durch Einzelkräfte ihren Wert beibehält und nur in den Lastpunkten sich sprungweise ändert. Man kann nun auch eine Fläche zeichnen, die für jeden Trägerquerschnitt die Größe der Querkraft angibt und daher Querkraftsfläche genannt wird. Man trägt zu diesem Zwecke von einer Wagrechten, der Nullachse, deren Länge $= AB$ ist, unter jedem Querschnitt den zugehörigen Wert der Querkraft lotrecht auf, und zwar die positiven Werte nach oben, die negativen nach unten (Fig. 47). Am zweckmäßigsten benutzt man dazu die Polfigur, mit deren Hilfe man die Querkräfte unmittelbar durch Zeichnung bestimmen kann. Man legt durch den Punkt, in welchem die Gleichlaufende S zur Schlußlinie s den Kräftezug trifft und dadurch R in die Auflagerdrücke A und B zerlegt, die wagerechte Nullachse und überträgt nun, wie Abb. 47 zeigt die Querkräfte unmittelbar aus dem Kräftezuge. Man subtrahiert also, von A ausgehend, gewissermaßen zeichnerisch die Einzelkräfte, wie es oben durch Rechnung geschehen ist.

Belastung durch Einzellast (Fig. 57). Dieser Fall ist ein Sonderfall des eben beschriebenen. Er soll nur allgemein behandelt werden. Fig. 57 zeigt die zeichnerische, ohne weitere Erklärung verständliche Lösung. Der gefährliche Querschnitt und damit das größte Biegungsmoment liegen unter der Einzellast. $M_{max} = H \cdot y_{max}$.

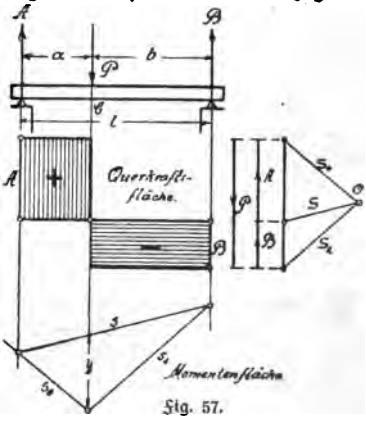


Fig. 57.

Rechnerische Lösung. Es ist:

$$A + B = P. \qquad (1)$$

Die Momentengleichung in bezug auf den Punkt B ergibt:

$$A \cdot l - P \cdot b = 0,$$

woraus: $$A = \frac{P \cdot b}{l}; \qquad (2)$$

in bezug auf den Punkt A findet man:

$$B \cdot l - P \cdot a = 0, \text{ also: } B = \frac{P \cdot a}{l}. \qquad (3)$$

Querkräfte: Im ersten Belastungsfelde wird:

$$V_1 = A$$

und im zweiten Belastungsfelde bei Betrachtung des linken Trägerstückes:

$$V_2 = A - P$$

oder einfacher bei Betrachtung des rechten Trägerstückes:

$$V_2 = -B, \quad \text{also auch:} \quad A - P = -B,$$

was man auch aus Gleichung (1) erhielte, wenn man berücksichtigt, daß $P > A$ sein muß.

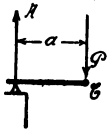


Fig. 58.

Biegungsmoment: Für C als Drehpunkt erhält man bei Betrachtung des linken Trägerstückes (Abb. 58):

$$M_{max} = A \cdot a, \quad \text{und da:} \quad A = \frac{P \cdot b}{l},$$

$$\text{so folgt:} \quad M_{max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}. \qquad (4)$$

Bei Betrachtung des rechten Trägerstückes erhält man gleichfalls:

$$M_{max} = B \cdot b = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}.$$

Wirkt die Einzellast in der Trägermitte, ist also: $a = b = \frac{l}{2}$, so wird:

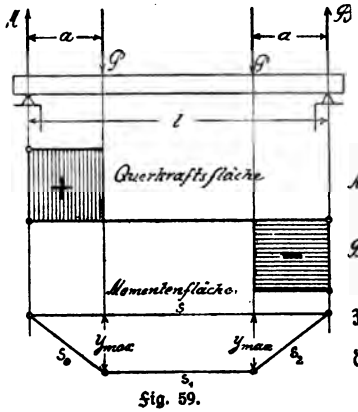
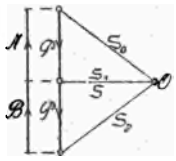


Fig. 59.

$$A = B = \frac{P}{2}$$

$$\text{und:} \quad M_{max} = A \cdot \frac{l}{2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2}$$

$$\text{oder:} \quad M_{max} = \frac{Pl}{4}. \qquad (5)$$



Belastung durch zwei Einzellasten in gleichem Abstand a vom Auflager. Die zeichnerische Lösung zeigt Fig. 59.

Rechnerische Lösung. Auflagerdrücke: Es ist:

$$A + B = P + P = 2P. \qquad (1)$$

Da die Lasten symmetrisch angeordnet sind, muß sein:

$$A = B = P,$$

was man auch aus der Momentengleichung erhält, nämlich:

$$A \cdot l - P(l - a) - P \cdot a = 0$$
$$A \cdot l - P \cdot l + P \cdot a - P \cdot a = 0$$
$$Al = Pl$$
$$A_1 = P.$$

Querkräfte: Es wird im

1. Belastungsfeld $V_1 = A$,
2. „ $V_2 = A - P = A - A = 0$, } von links gerechnet
3. „ $V_3 = -B$, von rechts gerechnet.

Biegungsmomente: Unter der ersten Last wird für C als Drehpunkt:

$M_C = A \cdot a$, oder da: $A = P$ ist, wird:
$M_C = P \cdot a$.

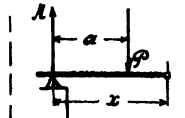


Fig. 60.

Für D als Drehpunkt wird (von rechts gerechnet):

$M_D = B \cdot a$, also da: $B = P$ ist, auch:
$M_D = P \cdot a$.

Für eine beliebige Stelle im Abstand x von A wird (Abb. 60):

$$M_x = A \cdot x - P \cdot (x - a), \quad \text{oder da: } A = P,$$

$$M_x = P \cdot x - Px + P \cdot a,$$

$$M_x = P \cdot a.$$

Das Moment hat also den Höchstwert $M_{max} = P \cdot a$ und behält diesen auf dem ganzen mittleren Belastungsfeld bei; jeder Querschnitt in diesem Felde ist also ein gefährlicher Querschnitt.

III. Träger auf zwei Stützen mit gleichmäßiger Belastung.

Aufgabe. Ein Träger von 6,0 m Stützweite sei mit 10 kg für 1 cm Länge gleichmäßig belastet. Die Auflagerdrücke, Querkräfte und größtes Biegungsmoment sind zu bestimmen (Fig. 61).

a) Rechnerische Lösung. Auflagerdruck. Für eine Stützweite von l m und eine Belastung von q kg/qcm wird ganz allgemein die Gesamtbelastung:

$$Q = q \cdot l.$$

Da die Belastung symmetrisch ist, muß sie sich zu gleichen Teilen auf die beiden Auflager verteilen. Es ist also:

$$A = B = \frac{Q}{2} = \frac{ql}{2}.$$

Querkräfte. Die Querkraft nimmt infolge der gleichmäßigen Belastung nicht sprungweise, sondern gleichmäßig, und zwar für jede Längeneinheit um die Größe q (für noch kleinere Längen um noch kleinere Maße) ab. Für eine beliebige Schnittstelle im Abstande x hat

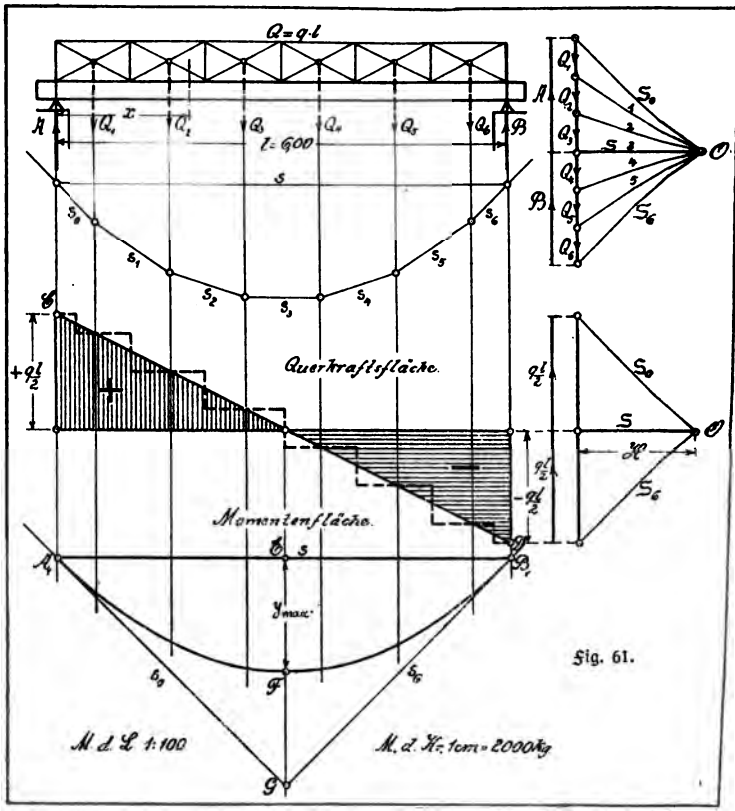


Fig. 61.

sie, da sie am Auflager natürlich wieder $= A$ ist, demnach die Größe (Fig. 61):

$$V = A - q \cdot x \quad \text{oder, da: } A = \frac{q\,l}{2}, \tag{1}$$

$$V = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x,$$

$$V = q\left(\frac{l}{2} - x\right). \tag{2}$$

Gefährlicher Querschnitt: Der gefährliche Querschnitt liegt da, wo $V = 0$ ist. In Gleich. (2) wird dies eintreten, wenn $x = \frac{l}{2}$. Der ge-

fährliche Querschnitt liegt bei einem gleichmäßig belasteten Träger also stets in der Mitte des Trägers.

Größtes Biegungsmoment: Da der gefährliche Querschnitt in der Trägermitte liegt, denkt man sich den Träger in der Mitte durchschnitten und zeichnet das linke Trägerstück wieder heraus (Fig. 62). An Kräften wirken der Auflagerdruck $A = \frac{ql}{2}$ und die auf die Strecke $\frac{l}{2}$ gleichmäßig verteilte Belastung $q\frac{l}{2}$. Letztere kann man, wenn man sich q für jede Längeneinheit aufgetragen denkt, wie in Fig. 61 durch ein Rechteck darstellen, in dessen Schwerpunkt sie angreift. Der zugehörige Hebelarm in bezug auf die Schnittstelle ist demnach $\frac{l}{4}$. Man erhält daher für die Schnittstelle das Moment:

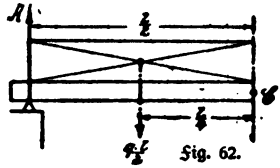


Fig. 62.

$$M_{max} = A\frac{l}{2} - q\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4} = q\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2} - q\frac{l^2}{8} = q\frac{l^2}{4} - q\frac{l^2}{8}$$

$$M_{max} = q\frac{l^2}{8} \quad \text{oder, da: } ql = Q, \text{ auch: } M_{max} = \frac{Q\cdot l}{8}.$$

Für eine beliebige Stelle im Abstande x von A wird nach Fig. 61:

$$M_x = A\cdot x - qx\cdot\frac{x}{2}$$

$$M_x = q\frac{l}{2}\cdot x - qx\cdot\frac{x}{2}$$

$$M_x = q\frac{x}{2}(l - x).$$

Für $x = 0$ wird daher auch $M_x = 0$, d. h. das Moment hat in den Auflagern den Wert 0.

Für unser Zahlenbeispiel wird:

$$Q = q\cdot l = 10\cdot 600 = 6000 \text{ kg}$$

$$A = B = \frac{Q}{2} = \frac{6000}{2} = 3000 \text{ kg}$$

$$M_{max} = \frac{Q\cdot l}{8} = \frac{6000\cdot 600}{8} = 450000 \text{ kgcm}.$$

b) **Zeichnerische Lösung.** Man kann den Fall auf den Fall der Belastung mit Einzellasten zurückführen, indem man den Träger in gleich

breite Streifen zerlegt und die auf jeden Streifen wirkende Belastung durch eine im Schwerpunkte des Streifens angreifende Einzellast ersetzt. Mit Hilfe des Seilecks bestimmt man dann nach Fig. 61 die Querkräfte und erhält dieselben Werte wie durch Rechnung. Es gelten also die oben gefundenen Formeln.

Bei der genannten Zerlegung des Trägers in gleich breite Streifen erhält die Querkraftsfläche die in Fig. 61 punktierte Gestalt. Es ist klar, daß diese Fläche ungenau ist. Sie wird umso genauer werden, je schmaler man die Streifen wählt, und die abgetreppte Linie wird in eine Gerade übergehen, sobald die Streifen unendlich schmal werden. Man braucht also nur die Verbindungsgerade CD zu ziehen, um die obere und untere Begrenzung und damit die genaue Gestalt der Querkraftsfläche zu erhalten. Da die beiden so entstehenden Dreiecke deckungsgleich sind, so schneidet CD die Nullinie in der Mitte. Der gefährliche Querschnit ergibt sich also auch hier in der Trägermitte.

Das Seileck liefert gleichfalls eine noch ungenaue Gestalt der Momentenfläche. Die Genauigkeit wird auch hier umso größer, je schmaler die Streifen sind. Bei unendlich kleiner Breite geht das Seileck in eine Kurve (Parabel) über (Fig. 61). Das größte Biegungsmoment liegt in der Mitte und hat wieder den Wert $M_{max} = H \cdot y_{max}$. An einer beliebigen Stelle des Trägers hat man y zu messen und erhält hierfür $M = H \cdot y$.

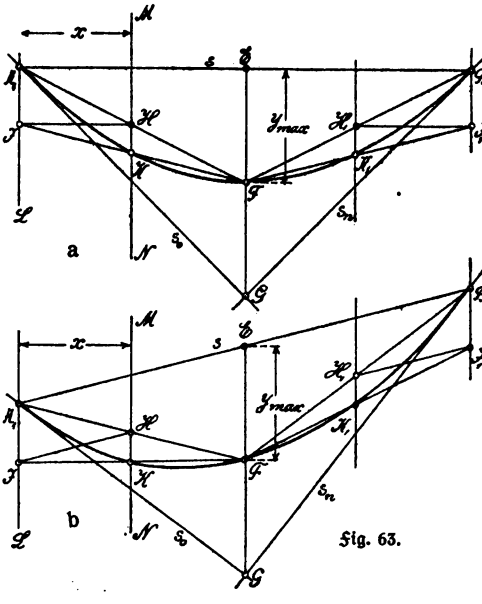


Fig. 63.

Nimmt man den Pol auf der im Halbierungspunkte von Q errichteten Winkelrechten an, so wird die Schlußlinie s des Seilecks wagerecht (Fig. 61). Die äußeren Seilstrahlen, welche die Berührungslinien in den Parabelpunkten A_1 und B_1 darstellen, schneiden sich auf einer durch die Trägermitte gelegten Lotrechten. Der Scheitel der Parabel geht durch die Mitte des Abstandes EG, also wird $EG = 2EF = 2y_{max}$, oder $y_{max} = \frac{EG}{2}$. Da eine Parabel durch drei Punkte (hier A, B und F) bestimmt ist, so braucht man die Zerlegung in Streifen nicht vorzunehmen, um die Mo-

mentenfläche zu zeichnen, sobald man die Konstruktion der Parabel kennt. Diese sei im folgenden für eine wagerechte und eine geneigte Schlußlinie s angegeben; sie ist für jedes Parabelstück anwendbar (Fig. 63a und b).

Man zieht die äußeren Seilstrahlen der Parabel s_0 und s_n im Punkte A_1 und B_1, bestimmt ihren Schnittpunkt G, zieht die Lotrechte EG und halbiert sie im Punkte F, welcher dann ein Parabelpunkt ist. EF ist die größte Parabelordinate. Sodann zieht man die Hilfslinien A_1F und B_1F. Zur Bestimmung irgend eines Parabelpunktes im Abstande x (senkrecht zur Kraftrichtung gemessen) bringt man die im Abstande x gezogene Lotrechte MN (bzw. Parallele zur Kraftrichtung) mit A_1F (bzw. B_1F für das rechte Parabelstück) zum Schnitt in H, zieht durch H eine Gleichlaufende zur Schlußlinie A_1B_1 und bestimmt deren Schnittpunkt I mit A_1L, verbindet I mit F, so ist der Punkt K als Schnittpunkt von MN mit IF der gesuchte Parabelpunkt. — Auf diese Weise bestimmt man noch andere Punkte, durch deren Verbindung sich die gesuchte Parabel ergibt. Die Ordinaten der damit bestimmten Momentenfläche dienen zur genauen Ermittelung der Momente an beliebigen Stellen des Trägers.

In unserem Beispiel ist $H = 1{,}5$ cm, also $H = 1{,}5 \cdot 2000 = 3000$ kg. Man findet, da $y_{max} = 150$ cm, mithin das Moment:

$$M_{max} = H \cdot y_{max} = 3000 \cdot 150 = 450000 \text{ kg/cm},$$

wie oben durch Rechnung.

IV. Träger auf zwei Stützen mit Streckenlasten.

Man denkt sich die Streckenlast durch eine oder mehrere Einzellasten ersetzt, die im Schwerpunkte der betreffenden Strecken angreifen und verfährt im übrigen genau wie bisher.

V. Träger auf zwei Stützen mit gemischter Belastung.

Dieser Fall kommt eigentlich stets vor, da das Eigengewicht des Trägers eine über diesen gleichmäßig verteilte Belastung darstellt. Doch ist das Eigengewicht im Vergleich zu den anderen Belastungen so gering und daher von so unbedeutendem Einfluß auf die Abmessungen des Trägers, daß man es ohne wesentliche Fehler vernachlässigen kann.

Aufgabe. Der in Fig. 64 gegebene Träger sei mit $q = 5$ kg/cm gleichmäßig und ferner in den gegebenen Abständen mit den Einzellasten $P_1 = 2000$ kg, $P_2 = 3000$ kg und $P_3 = 2000$ kg belastet. Auflagerdrücke, Querkräfte und Biegungsmomente sind zu bestimmen.

a) **Rechnerische Lösung.** Auflagerdrücke: Bei Bestimmung des Auflagerdruckes A erhält man für den Drehpunkt B:

$$A \cdot 1000 - P_1 \cdot 800 - P_2 \cdot 700 - P_3 \cdot 300 - ql \cdot 500 = 0$$

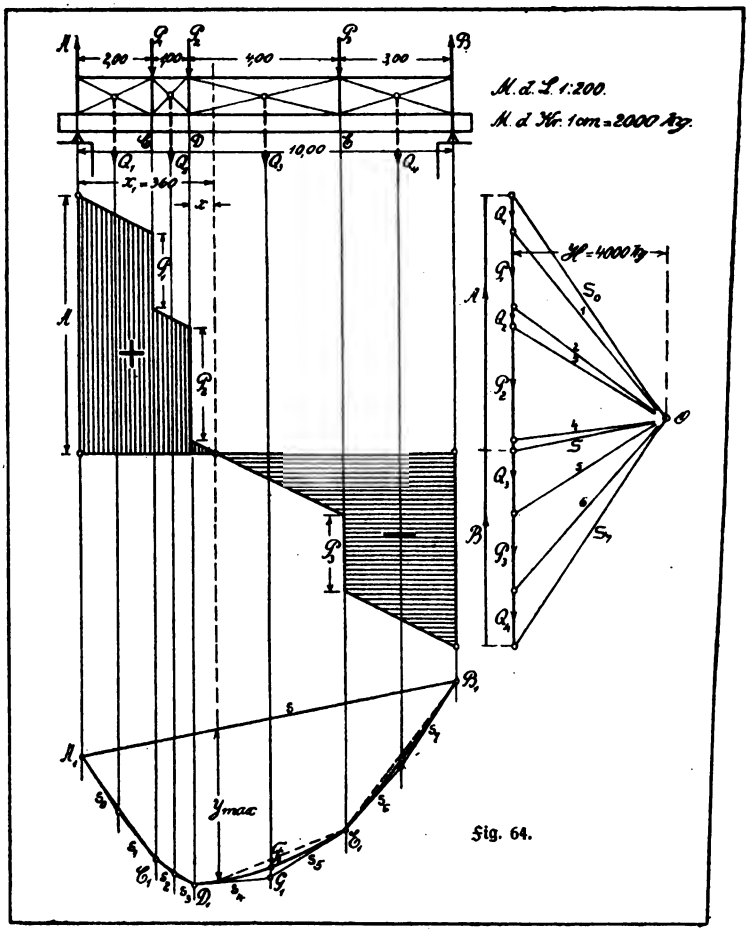


Fig. 64.

woraus sich unter Einsetzung der gegebenen Werte P ergibt:

$$A = \frac{2000 \cdot 800 + 3000 \cdot 700 + 2000 \cdot 300 + 5 \cdot 1000 \cdot 500}{1000}$$

$$A = 6800 \text{ kg}.$$

Für den Drehpunkt A erhält man:

$$B \cdot 1000 - P_3 \cdot 700 - P_2 \cdot 300 - P_1 \cdot 200 + q \cdot l \cdot 500 = 0,$$

woraus: $B = \dfrac{2000 \cdot 700 + 3000 \cdot 300 + 2000 \cdot 200 + 5 \cdot 1000 \cdot 500}{1000}$

$B = 5200$ kg.

Probe: $A + B = q \cdot l + P_1 + P_2 + P_3$

$6800 + 5200 = 5{,}0 \cdot 1000 + 2000 + 3000 + 2000$

$12000 = 12000$ kg, also richtig.

Gefährlicher Querschnitt und Querkraft: Die Belastung wird nach Fig. 64 wieder in einzelne Felder zerlegt, worauf dasjenige Belastungsfeld gesucht wird, in dem die Querkraft = 0 wird. Am Anfange des dritten Belastungsfeldes bei D wird:

$V_3 = A - P_1 - P_2 - q \cdot (200 + 100) = 6800 - 2000 - 3000 - 5 \cdot 300$

$V_3 = + 300$ kg,

und am Ende des dritten Belastungsfeldes bei E erhält man:

$V_4 = A - P_1 - P_2 - q(200 + 100 + 400) = 6800 - 2000 - 3000 - 5 \cdot 700$

$V_4 = - 1700$ kg.

Der gefährliche Querschnitt liegt also zwischen D und E. Da bei D noch $+ 300$ kg vorhanden waren, so muß bis zum gefährlichen Querschnitt noch eine Last von gleicher Größe ruhen, es ist also der gefährliche Querschnitt von D noch:

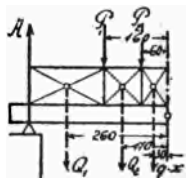


Fig. 65.

$$q \cdot x = 300, \text{ mithin: } x = \frac{300}{q} = \frac{300}{5} = 60 \text{ cm},$$

mithin vom linken Auflager $x_1 = 360$ cm entfernt.

Biegungsmoment: Man zeichnet sich das linke Trägerstück heraus (Fig. 65) und erhält:

$$M_{max} = A \cdot 360 - Q_1 \cdot 260 - P_1 \cdot 160 - Q_2 \cdot 110 - P_2 \cdot 60 - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

oder, da:

$Q_1 = 5 \cdot 2000 = 1000$ kg, $Q_2 = 5 \cdot 100 = 500$ kg, $q \cdot x_1 = 5 \cdot 60 = 300$ kg

$$M_{max} = 6800 \cdot 360 - 1000 \cdot 260 - 2000 \cdot 160 - 500 \cdot 110 - 3000 \cdot 60 - 300 \cdot \frac{60}{2}$$

$M_{max} = 1624000$ kg/cm.

b) **Zeichnerische Lösung.** Man kann dabei zwei Wege einschlagen.

Erstes Verfahren. Man zerlegt, wie in Fig. 64, den Träger in Belastungsfelder und schaltet die Einzellasten zwischen die durch die Teilung entstehenden Streckenlasten. Hierauf zeichnet man Kraft- und Seileck und bestimmt daraus die gesuchten Größen in bekannter Weise. Die Streckenlasten ergeben in der Begrenzung der Momentenfläche Parabelstrecken. Es genügt zu ihrer Konstruktion, die Endpunkte der einzelnen Parabelstrecken (z. B. $D_1 E_1$) zu verbinden, durch die Schnittpunkte der Seilstrahlen (G_1) Lote

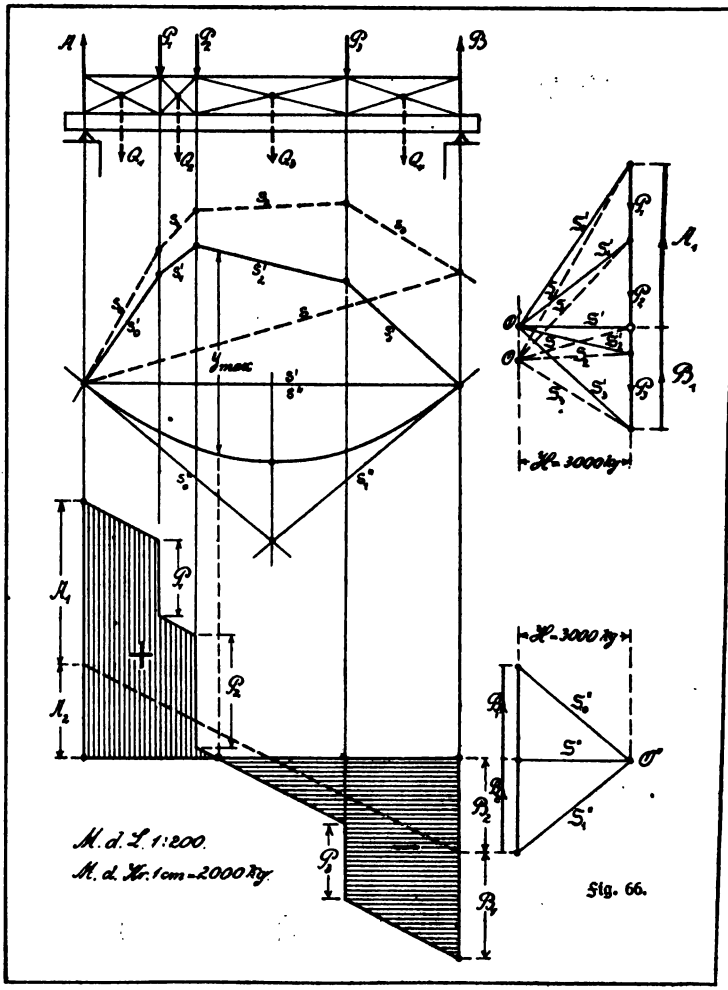


Fig. 66.

zu ziehen und die so gewonnenen Abstände ($F_1 G_1$) zu halbieren. Die Halbierungspunkte sind Parabelpunkte.

Die Begrenzung der Querkraftsfläche ändert sich auf die Länge der Belastungsfelder naturgemäß stetig, in den Lastpunkten der Einzellasten aber sprungweise.

Zweites Verfahren. Streckenlasten und Einzellasten werden getrennt behandelt, und für jede der beiden Gruppen werden unter Benutzung desselben Kräftemaßstabes und desselben Polabstandes in der Polfigur die Momenten- und Querkraftsfläche gezeichnet (Fig. 66). Derselbe Polabstand für beide Gruppen ist erforderlich, damit man die Gesamtordinaten y unmittelbar abgreifen kann. Da jedoch der eine Teil der Momentenfläche oberhalb, der andere unterhalb der Schlußlinie zu liegen kommt, so sind auch die Pole auf beiden Seiten des Krafteck entsprechend anzunehmen. Auch wird es in der Regel erforderlich werden, die Lage des einen Poles so zu verändern, daß die Schlußlinien der Seilecke für beide Gruppen zusammenfallen (s. Fig. 66).

VI. Durchgehende (kontinuierliche) Träger.

Der Begriff des durchgehenden Trägers ist bereits festgelegt. Denkt man sich bei dem einfachsten Fall (Träger auf drei Stützen) zur Bestimmung der Auflagerdrücke in irgend einem Stützpunkt den Drehpunkt, so erkennt man sofort, daß wohl das Moment dieses unbekannten Stützendruckes gleich Null wird, aber immer noch die Momente der beiden anderen unbekannten Stützendrucke in der Gleichung verbleiben. Die Aufgabe ist daher statisch unbestimmt und mit den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nicht zu lösen.

Da für Hochbaukonstruktionen Träger auf mehreren Stützen im allgemeinen nicht zu empfehlen sind, so werden sie in der Regel auf den Stützen gestoßen und als Träger auf zwei Stützen für jedes Feld berechnet.

VII. Anwendungen auf einfache Maschinen.

Die statischen Gesetze vom Gleichgewicht der Kräfte und vom statischen Moment finden auch Anwendung bei einfachen Maschinen, vor allem beim Hebel (bei der Wage), ferner beim Wellrad, der Rolle, den verschiedenen Flaschenzügen usw. An zwei kleineren Beispielen soll die Anwendung gezeigt werden.

Beispiel 1. An einem Wellrade wirke eine Last $Q = 600$ kg. Der Halbmesser des Rades sei $R = 80$ cm, der der Welle $r = 20$ cm. Welche Kraft P ist erforderlich, um der Last das Gleichgewicht zu halten?

Lösung. Die Summe der statischen Momente muß für den Fall des Gleichgewichtes gleich Null sein. Nach Fig. 67 ist demnach:

$$P \cdot R - Q \cdot r = 0 \quad \text{oder:} \quad P \cdot R = Q \cdot r \quad \text{mithin:} \quad P = \frac{Q \cdot r}{R}$$

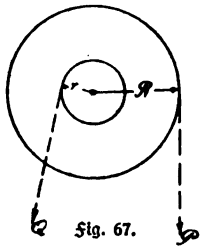


Fig. 67.

oder unter Einsetzung der Zahlenwerte:

$$P = \frac{600 \cdot 20}{80} = 150 \text{ kg}.$$

Um die Last aufzuziehen, müßte also eine Kraft von mehr als 150 kg angewandt werden.

Beispiel 2. Die Last soll ermittelt werden, welche mit Hilfe eines Differentialflaschenzuges gehoben werden kann, wenn das Verhältnis der Halbmesser $\frac{r}{R} = \frac{9}{10}$ und die aufgewendete Kraft $P = 45$ kg ist.

Lösung. Der Differentialflaschenzug besteht bekanntlich aus miteinander verbundenen festen Rollen von verschiedenem Durchmesser mit gemeinschaftlicher Achse und einer losen Rolle, an deren Haken die Last angebracht wird. Beim Aufziehen der Last wickelt sich eine endlose Kette an der einen Seite von der kleinen Rolle ab und gleichzeitig an der anderen Seite der großen Rolle auf (Fig. 68). Da die Kette durch die Last Q gespannt wird, so entfällt auf jeden Kettenteil mithin der Anteil $\frac{Q}{2}$. Da man nun $ABCD$ als doppelarmigen Hebel mit dem Drehpunkte C betrachten kann, so besteht mithin die Gleichgewichtsgleichung:

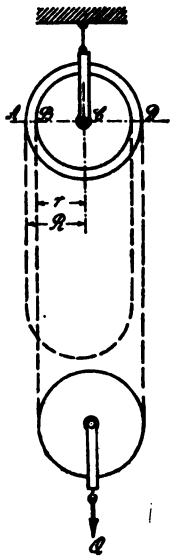


Fig. 68.

$$P \cdot \overline{AC} + \frac{Q}{2} \cdot \overline{BC} - \frac{Q}{2} \cdot \overline{CD} = 0$$

$$\text{oder: } P \cdot R + \frac{Q}{2} \cdot r - \frac{Q}{2} \cdot R = 0,$$

$$\text{woraus: } P \cdot R = \frac{Q}{2} \cdot R - \frac{Q}{2} \cdot r$$

$$P = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2} \cdot \frac{r}{R} \quad \text{oder: } P = \frac{Q}{2} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Diese Gleichung gilt für jeden Differentialflaschenzug. Mit Einsetzung der gegebenen Zahlenwerte erhält man nunmehr, da die Gleichung für Q aufzulösen ist:

$$Q = \frac{2P}{1 - \frac{r}{R}} = \frac{2 \cdot 45}{1 - \frac{9}{10}} = \frac{90}{\frac{1}{10}}$$

$$Q = 900 \text{ kg}.$$

Zweiter Abschnitt.

Festigkeitslehre.

A. Einleitung.

1. Allgemeines.

Wir sahen bereits, daß durch die auf einen Bauteil wirkenden äußeren Kräften infolge des Zusammenhanges (Kohäsion) der Massenteilchen innere Kräfte hervorgerufen werden, die mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht sein müssen und bestimmend für die Wahl der Abmessungen des Bauteiles sind. Die Feststellung des Gleichgewichtes zwischen inneren und äußeren Kräften und ihre Beziehungen zueinander und die Wahl der Abmessungen bilden die Aufgabe der Festigkeitslehre. Dabei muß man beachten, daß weder eine Zerstörung, noch auch eine über ein gewisses Maß hinausgehende Formänderung der betreffenden Bauteile eintritt.

Sobald man an einer Reckstange turnt, bemerkt man, daß sie sich durchbiegt, und zwar desto mehr, wenn man in der Nähe der Mitte oder gar in der Mitte selbst turnt (Einzelkraft beim Träger auf zwei Stützen), sobald man aber die Reckstange verläßt, nimmt sie ihre wagrechte Gestalt wieder an. Doch beobachtet man bei vielbenutzten Reckstangen auch, daß sie nach der Seite, die am häufigsten benutzt wird, etwas durchgebogen bleiben. Zieht man an einem Gummifaden, so dehnt er sich aus, zieht sich aber wieder zu seiner ursprünglichen Länge zusammen, sobald die Zugwirkung aufhört. Drückt man ein Stück Radiergummi zusammen und läßt dann wieder nach, so beobachtet man auch die Rückkehr in die frühere Form. Man erkennt also, daß unter der Einwirkung von Kräften ein Körper seine Form ändert, jedoch das Bestreben hat, nach Aufhören der Einwirkung der Kräfte seine frühere Gestalt wieder fast ganz oder doch wenigstens teilweise anzunehmen. Diese Eigenschaft, die jeder Körper in höherem oder geringerem Maße besitzt, nennt man Elastizität. Doch gibt es keine vollkommen elastischen (auch keine vollkommen unelastischen) Körper, da ein sehr kleiner Teil der Formänderung nach Aufhören der Kraftwirkung bestehen bleibt (bleibende Formänderung im Gegensatz zu der elastischen Formänderung). Bei Bemessung der Bauteile muß man

beachten, daß die bleibende Formänderung so gering ausfällt, daß man sie vernachlässigen kann. Würde eine merkbar bleibende Formänderung eintreten, so würde der Körper, wie man sagt, bis zur Elastizitätsgrenze beansprucht. Bei Beanspruchung über diese Grenze hinaus, wird eine Zerstörung des Körpers eintreten.

Die auf die Flächeneinheit bezogene innere Kraft (Spannung), welche im Körper bei der Zerstörung auftritt, heißt Festigkeit. Je nach der Art der Einwirkung der Kräfte und der daraus entstehenden Verschiebung der Massenteilchen des von ihnen beanspruchten Körpers, unterscheidet man verschiedene Festigkeitsarten.

II. Die verschiedenen Festigkeitsarten.

1. Zugfestigkeit. Beansprucht eine in der Achse eines stabförmigen Körpers senkrecht zum Querschnitt wirkende Kraft den Körper so, daß sie zwei benachbarte Querschnitte voneinander zu entfernen, den Stab also zu verlängern sucht, so wird der Stab auf Zug beansprucht. Eine Zerstörung tritt durch Zerreißen ein (Ankerstangen und dgl.)

2. Druckfestigkeit. Werden zwei benachbarte Stabquerschnitte durch eine in der Stabachse wirkende Kraft einander zu nähern, der Stab also zu verkürzen gesucht, so entsteht eine Beanspruchung auf Druck (Säulen und Stützen, Mauerpfeiler und dgl.). Die Zerstörung erfolgt durch Zerdrücken (Zerquetschen, Zermalmen).

3. Schub- oder Scherfestigkeit. Sucht eine Kraft zwei benachbarte Stabquerschnitte quer zur Längsachse, also in ihren Ebenen gegeneinander in entgegengesetztem Sinne zu verschieben, so erfolgt eine Beanspruchung auf Schub- oder Abscherung (Nietverbindungen, Konsolen; Wirkung der Querkräfte bei Trägern auf zwei Stützen). Die Zerstörung erfolgt durch Abscheren.

4. Biegungsfestigkeit. Wirken äußere Kräfte senkrecht zur Längsachse des Stabes, so entsteht eine Durchbiegung (Träger). Die Zerstörung erfolgt durch Zerbrechen.

5. Knickfestigkeit. Wirken die äußeren Kräfte in der Längsachse des Stabes, ist jedoch der Querschnitt des Stabes im Vergleich zu seiner Länge sehr gering, so findet gleichzeitig eine Biegung und eine Zusammendrückung statt. Die Zerstörung erfolgt durch Knicken (Säulen und Stützen, Pfosten und dgl.)

6. Drehungsfestigkeit (Torsionsfestigkeit). Die äußeren Kräfte wirken senkrecht zur Längsachse des Stabes, aber außerhalb

derselben, so daß ein Drehmoment entsteht, das zwei benachbarte Querschnitte gegeneinander zu verdrehen sucht. Die Zerstörung erfolgt durch Abdrehen. Diese Beanspruchung kommt besonders häufig im Maschinenbau vor.

7. Zusammengesetzte Festigkeit. Je nach der Richtung der Kräfte kann ein Bauteil so beansprucht werden, daß mehrere der eben genannten Festigkeiten gleichzeitig auftreten. Es entsteht dann zusammengesetzte Festigkeit. Am häufigsten kommt vor Druck und Biegung und Zug und Biegung (s. später unter G), jedoch im Maschinenbau auch Biegung und Drehung.

B. Zug- und Druckfestigkeit.

1. Allgemeines.

Wirkt auf einen Stab in seiner Längsachse eine Kraft P ein, so ist Gleichgewicht vorhanden, wenn eine gleichgroße Gegenkraft durch die Befestigung, Auflagerung und dgl. gewährleistet wird.

Erfahrungsgemäß kann man annehmen, daß sich die im Schwerpunkte des Querschnittes angreifende Kraft gleichmäßig über die Gesamtfläche von F qcm des Querschnittes verteilt. Auf einen qcm des Querschnittes kommt daher ein Teil der Kraft von der Größe $\frac{P}{F}$, welcher von der Festigkeit des Stabes aufgenommen werden muß und eine gleichgroße innere Kraft k (Spannung oder Beanspruchung genannt) hervorruft. Die Spannung hat also an jeder Stelle des Querschnittes die Größe:

$$k = \frac{P}{F}\,\frac{\text{kg}}{\text{qcm}}. \qquad (1)$$

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß diese Beziehung sowohl für Zug wie für Druck gelten muß.

Diejenige Spannung, bei deren Auftreten ein Zerreißen oder Zerdrücken des Stabes eintritt, heißt Bruchfestigkeit oder Bruchmodul (Bezeichnung K_z für Zug, K_d für Druck). Sie ist für manche Baustoffe für Zug und Druck gleichgroß (z. B. Flußeisen: $K_z = K_d = 4000$ kg/qcm), für andere verschieden (z. B. Gußeisen: $K_z = 1250$, $K_d = 7500$ kg/qcm), weshalb Gußeisen für gedrückte Bauteile sich besser eignet als für gezogene. Selbstverständlich darf ein Köper nicht bis an die Grenze der Bruchfestigkeit beansprucht werden, sondern nur soweit, daß er

die Beanspruchung nicht nur mit völliger Sicherheit aufnehmen kann, sondern auch noch einen Überschuß an Sicherheit besitzt (**Sicherheitsgrad**). Diejenige Spannung, bis zu welcher man im Bauwesen einen Bauteil beanspruchen darf, nennt man die **zulässige Beanspruchung** oder **zulässige Spannung** und bezeichnet sie mit k (k_z für Zug, k_d für Druck).

Das Verhältnis der Bruchfestigkeit zur zulässigen Beanspruchung $\frac{K_z}{k_z} = n$, bzw. $\frac{K_d}{k_d} = n$ ist der **Sicherheitsgrad**. Man sagt dann der Bauteil besitze $n$fache Sicherheit. Bei Flußeisen ist meist $n = 3-5$, bei Gußeisen $n = 6-8$, bei Holz und Stein $n = 10$.

Wir sahen bereits, daß ein auf Zug beanspruchter Stab verlängert, ein auf Druck beanspruchter verkürzt wird. Diese Längenänderungen verteilen sich erfahrungsgemäß gleichmäßig über die ganze Stablänge. Ist v die gesamte Veränderung der Stablänge l (bei Zug $= +v$, bei Druck $= -v$), so ergibt sich für die Längeneinheit die Änderung $= \frac{v}{l}$.

Die Längenänderung der Längeneinheit (1 cm) eines Stabes bei der Beanspruchung $k\frac{\text{kg}}{\text{qcm}}$ nennt man **Dehnung** und bezeichnet sie mit ϵ. Es ist also:

$$\epsilon = \frac{v}{l}. \tag{2}$$

Ist die Spannung nicht $k\frac{\text{kg}}{\text{qcm}}$, sondern nur 1 kg, so beträgt die Dehnung der Längeneinheit nur den $k$ten Teil von ϵ, also $= \frac{\epsilon}{k}$. Man setzt:

$$\frac{\epsilon}{k} = \alpha \tag{3}$$

und nennt α die **Dehnungsziffer** oder den **Dehnungskoeffizienten**. Die Dehnungsziffer gibt also an, um welche Strecke sich ein Stab von der Länge 1 cm bei einer Belastung von 1 kg für 1 qcm Querschnittsfläche dehnt.

Der Wert α hängt ab vom Baustoffe und von der Beanspruchung. Er ist sehr klein und daher für die Rechnung unpraktisch. Man führt deshalb den umgekehrten Wert von α in die Rechnung ein und bezeichnet diesen mit E. Es ist also:

$$\frac{1}{\alpha} = E. \tag{4}$$

Der Wert E heißt Elastizitätsziffer oder Elastizitätsmaß (Elastizitätsmodul). Da $\frac{\epsilon}{k} = \alpha$, so ist $\frac{1}{\alpha} = \frac{k}{\epsilon}$, mithin:

$$E = \frac{k}{\epsilon}. \tag{5}$$

Mit wachsendem k nimmt auch die Dehnung zu. Durch Versuche ist nachgewiesen, daß die Dehnungen im gleichen Maße wie die Spannungen bei vielen Baustoffen wachsen, so daß $\frac{k}{\epsilon}$ ein gleichbleibender (konstanter) Wert ist.

Aus Gleichung (5) folgt [illegible] also:

$$\epsilon = \frac{k}{E}, \tag{6}$$

d. h. die Dehnungen stehen im gleichen Verhältnis zu den Spannungen.

Dieses wichtige Gesetz nennt man das Elastizitätsgesetz oder das Hookesche Gesetz. Es gilt jedoch nur bis zu einer gewissen Spannungsgrenze, der Proportionalitätsgrenze, die im allgemeinen mit der Elastizitätsgrenze nicht zusammenfällt. Für Holz und die meisten Metalle hat das Elastizitätsgesetz Geltung, aber nicht für die künstlichen und natürlichen Bausteine, für Mörtel, Beton und Gußeisen.

Aus Gleichung (2) und (5) folgt durch Einsetzung von ϵ:

$$\frac{v}{l} = \frac{k}{E} \quad \text{und:} \quad v = \frac{k \cdot l}{E}; \quad k = \frac{P}{F}, \quad \text{also:} \tag{7}$$

$$v = \frac{P \cdot l}{F \cdot E}, \tag{8}$$

woraus man die Verlängerung oder Verkürzung v berechnen kann.

Die Werte für k_z, k_d, E bei den verschiedenen Baustoffen sind aus Tabellen[1]) zu entnehmen. Sie werden in folgendem häufig angewendet und daher für die wichtigsten Baustoffe schnell geläufig werden.

Beispiel. Die Verlängerung v eines Rundeisenstabes aus Flußeisen von 300 cm Länge und 30 mm Durchmesser ist zu berechnen für den Fall, daß an dem Stabe eine Zugkraft $P = 20000$ kg wirkt.

1) Zu empfehlen sind die Mathematischen und Technischen Tabellen von Schultz-Dieckmann. Verlag von Bädeker, Essen.

Lösung. Für das Flußeisen ist $E = 2150000$ kg/qcm. **Gegeben** ist ferner $l = 300$ cm; $d = 3{,}0$ cm; $P = 20000$ kg. Mithin ist:

$$F = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{3{,}0^2 \cdot 3{,}14}{4} = 7{,}07 \text{ qcm}$$

und: $$v = \frac{P \cdot l}{F \cdot E} = \frac{20000 \cdot 300}{7{,}07 \cdot 2150000} = 0{,}395 \text{ cm}.$$

II. Zugfestigkeit.

Ist P diejenige Kraft, welche einen Stab in seiner Achse auf Zug beansprucht, F die Querschnittsfläche des Stabes in qcm und k_z die zulässige Beanspruchung auf Zug in kg für 1 qcm, so muß, wenn zwischen den inneren und äußeren Kräften Gleichgewicht herrschen soll, sein:

$$P = F \cdot k_z. \tag{9}$$

F ist jedoch stets der nutzbare Querschnitt, d. h. derjenige, welcher nach Abzug etwaiger Verschwächung (z. B. durch Nietlöcher) übrig bleibt.

Sobald in Gleichung (9) zwei Größen bekannt sind, läßt sich die dritte berechnen. Bei gegebenem P und bekanntem k_z ergibt sich daher als erforderlicher Querschnitt eines Bauteiles:

$$F = \frac{P}{k_z}. \tag{9a}$$

Die in einem Bauteil auftretende Spannung kann man bei bekanntem P und F berechnen aus:

$$k_z = \frac{P}{F}. \tag{9b}$$

Bemerkt sei noch, daß bei statischen Untersuchungen im allgemeinen keine allzu genaue Rechnung erforderlich ist, da die für die Baustoffe gemachten Annahmen nicht mathematisch genau sind. Daher dürfen Abweichungen vom genauen Ergebnis durch vereinfachte Rechnung vorkommen, aber nicht mehr als 1 % vom genauen Resultat betragen.

Beispiel 1. Eine Zugstange von kreisförmigem Querschnitt hat einen Gewölbeschub von $P = 15000$ kg aufzunehmen. Der Durchmesser der Stange, die nach Fig. 69 durch eine Schraube am Ende befestigt wird, ist zu bestimmen.

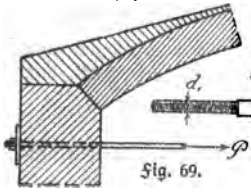


Fig. 69.

Lösung. Der nutzbare Querschnitt befindet sich am Stangenende an der Befestigungsstelle. Dieses sei mit einem Whitworthischen Gewinde versehen. Daher ist zunächst der Kerndurchmesser d_1 zu bestimmen.

Gegeben ist $P = 15000$ kg; k_z für Flußeisenanker $= 800$ kg/qcm.

Mithin wird: $P = F \cdot k_z$ und: $F = \frac{P}{k_z} = \frac{15000}{800} = 19$ qcm

$$F = \frac{d_1^2 \pi}{4} = 19{,}0; \quad \text{woraus: } d_1 = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 19}{3{,}14}}$$

$$d_1 = 4{,}92 \text{ cm}.$$

Der Bolzendurchmesser wird bestimmt aus der Beziehung:

$$d = \frac{d_1 + 0{,}13}{0{,}9} = \frac{4{,}92 + 0{,}13}{0{,}9}$$

$$d = 5{,}61 \text{ cm}.$$

Gewählt wird ein Bolzen mit einem Durchmesser $d = 5{,}8$ cm und $d_1 = 4{,}91$ cm nach der Whitworths-Skala.

Beispiel 2. Die Stärke der Zugstangen AB des in Fig. 70 skizzierten Kranauslegers ist für eine Belastung von $P = 5000$ kg zu berechnen.

Lösung. Mit Hilfe der Gleichgewichtsfigur findet man, daß in AB eine Zugkraft:

$Z = 7900$ kg

auftritt. Daher wird:

$$F = \frac{P}{k_z}$$

und da: $F = \frac{d^2 \pi}{4}$,

so folgt: $\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{P}{k_z}$,

woraus:

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi \cdot k_z}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 \cdot 7900}{3{,}14 \cdot 1200}}$$

$d = \sim 3$ cm.

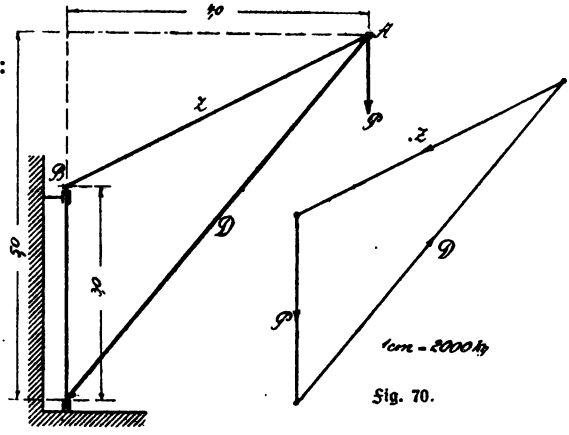


Fig. 70.

Beispiel 3. Die Tragfähigkeit einer flußeisernen Zugstange von 25 mm Φ ist zu berechnen.

Lösung. Man erhält aus: $P = F \cdot k_z$,

da: $F = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{2{,}5^2 \cdot 3{,}14}{4} = 4{,}91$ qcm und: $k_z = 1200$ kg/qcm:

$$P = 4{,}91 \cdot 1200 = 5892 \text{ kg}.$$

Beispiel 4. Die Hängesäule des auf S. 26 untersuchten **Hängewerkes** erhielt eine Zugbeanspruchung von 3000 kg. Wie groß ist die **Spannung**, wenn ein Querschnitt von $^{12}/_{12}$ cm angenommen wird (die **zulässige** Beanspruchung sei 120 kg/qcm).

Lösung. Gegeben $P = 3000$ kg, $F = 12 \cdot 12 = 144$ cm². Die **Spannung** folgt aus:

$$k_z = \frac{P}{F} = \frac{3000}{144} = \sim 21 \text{ kg/qcm}.$$

Die zulässige Spannung wird also bei weitem noch nicht erreicht.

III. Druckfestigkeit.

Die über Zugfestigkeit angestellten Betrachtungen gelten auch für Druckfestigkeit. Soll Gleichgewicht herrschen, so muß also sein:

$$P = F \cdot k_d \qquad (10)$$

woraus $F = \frac{P}{k_d}$ und $k_d = \frac{P}{F}$ gefunden wird.

Auch hier ist die kleinste Querschnittsfläche maßgebend, doch braucht man für Nietschwächung keinen Abzug zu machen, da man annehmen kann, daß das Nietloch durch den Nietschaft vollständig ausgefüllt wird und damit auch eine vollkommene Druckübertragung stattfindet.

Für Flußeisen und Stahl ist $k_d = k_z$. Gußeisen, Steine und Beton können auf Druck erheblich höher beansprucht werden als auf Zug, bei Holz ist jedoch $k_z > k_d$.

Sehr häufig wird der Druck von einem Baustoff auf einen anderen übertragen, z. B. der Druck einer Stütze durch einen eisernen Fuß auf ein Steinfundament und durch dieses wieder auf den Erdboden. **In solchen Fällen ist stets die Festigkeit des weniger druckfesten Baustoffes in Rechnung zu ziehen.** Die Unterlagsplatte ist daher so zu bemessen, daß der Stein nicht zu stark beansprucht wird (also k_d für Stein), das Steinfundament muß wieder eine solche Grundfläche erhalten, daß der Boden nicht zerdrückt wird (also k_d für Boden).

Bei auf Druck beanspruchten Baukörpern ist häufig das Eigengewicht zu berücksichtigen, weil es sehr erheblich werden kann, z. B. bei Mauern, Brückenpfeilern u. dgl.

Beispiel 1. Ein Pfosten aus Kiefernholz von 1,20 m Höhe hat einen Druck $P = 18000$ kg aufzunehmen. Die zulässige Beanspruchung sei $k_d = 60$ kg/qcm. Welche Abmessungen muß der quadratische Pfosten erhalten?

Lösung. Gegeben $P = 18000$ kg; $k_d = 60$ kg/qcm. Es wird:

$$F = \frac{P}{k_d} = \frac{18000}{60} = 300 \text{ qcm},$$

mithin muß der Pfosten eine Seitenlänge erhalten:

$$x = \sqrt{300} = 17{,}3 = \sim 18 \text{ cm}.$$

(Der Pfosten ist noch auf Zerknicken zu berechnen).

Beispiel 2. Der Obergurt eines flußeisernen Dachbinders soll aus zwei Winkeleisen bestehen und einen Druck $P = 14000$ kg aufnehmen. Welches Profil ist zu wählen?

Lösung. Gegeben $P = 14000$ kg; $k_d = 1200$ kg/qcm.

Ein Winkeleisen muß $\frac{P}{2} = 7000$ kg aufnehmen. Erforderlich ist hierfür ein Querschnitt:

$$F = \frac{P}{k_d} = \frac{7000}{1200} = \sim 6 \text{ cm}.$$

Hierfür würde genügen ein Winkeleisen 50 · 50 · 7 mit $F = 6{,}56$ qcm. Doch verwendet man im Dachbau zweckmäßig nicht Winkel unter 60 · 60 · 10.

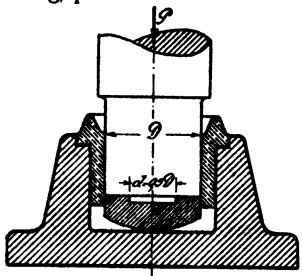


Fig. 71.

Beispiel 3. Der Durchmesser des Spurzapfens einer in der Achse mit 12000 kg belasteten Welle ist zu ermitteln für den Fall, daß die aus Bronze hergestellte Spurplatte als Ringplatte mit einer Bohrung von der Größe des halben Zapfendurchmessers ausgeführt wird und die auftretende Druckspannung 35 kg/qcm nicht überschreitet (Fig. 71).

Lösung. Nach Gleichung 10 ist:

$$F = \frac{P}{k_d}$$

$$F = (D^2 - d^2) \cdot \frac{\pi}{4} \quad \text{oder da:} \quad d = 0{,}5\,D,$$

$$F = (D^2 - (0{,}5\,D)^2) \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$F = D^2 \cdot (1 - 0{,}25) \cdot \frac{\pi}{4} = 0{,}75 \frac{\pi}{4} \cdot D^2$$

mithin: $0{,}75 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 = \frac{12000}{35}$, woraus: $D = \sqrt{\frac{12000 \cdot 4}{0{,}75 \cdot \pi \cdot 35}}$

$$D = 24{,}2 \text{ cm}.$$

Beispiel 4. Eine kurze gußeiserne Säule von ringförmigem Querschnitt überträgt einschließlich ihres Eigengewichtes eine Last von $P = 50000$ kg auf einen aus Klinkern in Zementmörtel gemauerten

Pfeiler. Die Fußplatte ruht unmittelbar auf einem Auflagerstein. Säule, Fußplatte, Auflagerstein und unterste Fundamentfuge sind zu berechnen (Fig. 72).

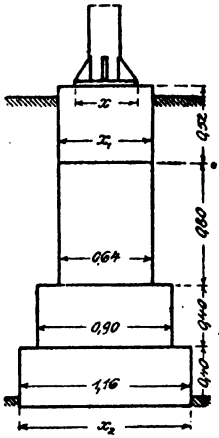


Fig. 72.

Lösung. a) Säule. Gegeben $P = 50000$ kg; $k_d = 500$ kg/qcm (nach Tabelle). Erforderlicher Querschnitt:

$$F = \frac{P}{k_d} = \frac{50000}{500} = 100 \text{ qcm}.$$

Gewählt wird nach Tabelle ein Säulenquerschnitt mit einem äußeren Durchmesser $D = 18$ cm, einem inneren Durchmesser $d = 14$ cm und einer Wandstärke $\delta = 2{,}0$ cm mit einem Querschnitt $F = 100{,}5$ qcm. (Es müßte noch Prüfung auf Knickfestigkeit erfolgen).

b) Fußplatten. Die Platte muß so bemessen werden, daß die Flächeneinheit (1 qcm) des darunter befindlichen Auflagerquaders nicht stärker beansprucht wird, als für Sandstein zulässig ist. Für Sandstein beträgt nach Tabelle $k_d = 30$ kg/qcm. Gegeben ist $P = 50000$, mithin ist erforderlich:

$$F = \frac{P}{k_d} = \frac{50000}{30} = 1667 \text{ qcm}.$$

Demnach wird die Seitenlänge der quadratischen Platte:

$$x = \sqrt{F} = \sqrt{1667} = \sim 41 \text{ cm}.$$

c) Auflagerstein. Schätzt man das Gewicht des Auflagersteines auf 500 kg, so wird $P_1 = 50000 + 500 = 50500$ kg. Für k_d kommt die Festigkeit des unter dem Stein befindlichen Mauerwerks in Frage; hierfür ist $k_d = 12$ kg/qcm nach Tabelle, mithin:

$$F_1 = \frac{P_1}{k_d} = \frac{50500}{12} = 4210 \text{ qcm}.$$

Demnach wird die Seitenlänge des Steines, die stets auf Mauerwerksmaß nach oben abzurunden ist:

$$x_1 = \sqrt{F_1} = \sqrt{4210} = 64 \text{ cm}.$$

Die Höhe des Auflagersteines wählt man zweckmäßig zu $^3/_4$ bis $^4/_5$ der größten Abmessung des Auflagersteinquerschnittes, also:

$$h = \frac{3}{4} \cdot 64 = 48 \text{ cm}.$$

Dann wird das Gewicht des Auflagersteins, wenn 1 cbm Sandstein 2500 kg wiegt:

$$G_1 = 0{,}64^2 \cdot 0{,}48 \cdot 2500 = \sim 500 \text{ kg}.$$

d) Fundamentfläche. Das Eigengewicht des Pfeilers muß berücksichtigt werden. Es beträgt nach Fig. 72:

$$G_2 = [0{,}64^2 \cdot 0{,}80 + 0{,}40 \cdot (0{,}90^2 + 1{,}16^2)] \cdot 1800$$
$$G_2 = \sim 4500 \text{ kg},$$

mithin wird die auf den Baugrund wirkende Gesamtlast:

$$P_2 = 50000 + 500 + 4500 = 55000 \text{ kg}$$

und die Größe der erforderlichen Fundamentfläche unter Annahme, daß $k_d = 4$ kg/qcm (im allgemeinen bei gutem Baugrund 3 bis 4 kg/qcm):

$$F_2 = \frac{P}{k_d} = \frac{55000}{4} = 13750 \text{ qcm},$$

also ihre Seitenlänge:

$$x_2 = \sqrt{F_2} = \sqrt{13750} = 1{,}16 \text{ m}.$$

Auflagerung von Trägern. Die Bemessung der Auflagerfläche eines Trägers wird auch mit Hilfe der Druckformel durchgeführt. Doch sollen hierbei gleichzeitig einige zu beachtende Regeln gegeben werden.

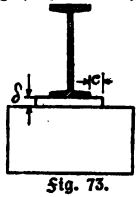


Fig. 73.

Auflagerplatten aus Eisen sind stets 3 bis 5 cm von der Mauerkante entfernt zu legen. Häufig erhalten sie eine Unterstützung aus Werkstein. Auflager aus Werkstein ohne Auflagerplatte sind nicht zu empfehlen. Als Stützweite ist nicht die Lichtweite (Entfernung von Mauerkante zu Mauerkante), sondern gemäß den ministeriellen Bestimmungen die Entfernung zwischen den Lagermitten zu wählen.

Auflagerplatten aus Gußeisen erhalten eine Stärke von mindestens 3 cm, flußeiserne eine solche von mindestens 2 cm. Der seitliche Überstand über die Flansche der Träger ist auf jeder Seite bei Gußeisen $c \leqq 3\delta$ und bei Flußeisen $c \leqq 5\delta$ zu wählen (Fig. 73), da sich bei größerem Überstande zu starke Biegungsbeanspruchungen der Platte ergeben würden.

Auflagersteine erhalten eine Stärke h von mindestens 20 cm, im allgemeinen macht man sie $h = \frac{3}{4} - \frac{4}{5}$ der größten Seitenabmessung (s. Beispiel 4). Der seitliche Überstand wird $\leqq \frac{2}{3} h$ gemacht. Der Träger braucht nur auf $\frac{3}{4}$ der Länge des Auflagersteines aufzuliegen.

Kleine I-Träger erhalten eine Auflagerlänge nicht unter 15 cm, bei Profilen über N. Pr. 15 gleich der Trägerhöhe, bei Trägern über 25 cm Höhe etwas kürzer, jedoch stets $\geqq \frac{3}{4}$ der Trägerhöhe.

Mehrere Träger erhalten am besten eine gemeinsame Unterlags-

platte. Unter der Platte wird stets eine Zementfuge von 8 bis 12 mm Stärke, bei großen Lasten Walzblei von 3 bis 5 mm Stärke angeordnet.

Beispiel 5. Der auf S. 57 untersuchte, durch gemischte Belastung beanspruchte Träger erzeugte einen Auflagerdruck $A = 6800$ kg und ein $M_{max} = 1624000$ kg/cm. Hierfür ist ein I-Träger N. Pr. 40 erforderlich. Die Auflagerung soll untersucht werden.

Lösung. a) Auflagerung unmittelbar auf Mauerwerk. Hierfür ist $k_d = 7$ kg/qcm. Gegeben $P = A = 6800$ kg. Die erforderliche Auflagerfläche ist daher:

$$F = \frac{P}{k_d} = \frac{6800}{7} = 970 \text{ qcm}.$$

Die Flanschbreite eines I N. Pr. Nr. 40 ist $b = 15{,}5$ cm. Bezeichnet x die Auflagerlänge, so ist daher auch $F = 15{,}5x$; mithin:

$$15{,}5x = 970$$

$$x = \frac{970}{15{,}5} = 63 \text{ cm}.$$

Da diese Auflagerlänge zu groß ist, soll zu ihrer Verminderung eine Anzahl Schichten unter dem Träger aus Hartbrandziegeln in Kalkzementmörtel ausgeführt werden, wofür $k_d = 12$ kg/cm² ist.

b) Auflagerung auf Hartbrandziegeln in Kalkzementmörtel. Gegeben $P = A = 6800$ kg; $k_d = 12$ kg/qcm. Erforderlich ist:

$$F_1 = \frac{P}{k_d} = \frac{6800}{12} = 567 \text{ qcm}$$

$$\text{und:} \quad x_1 = \frac{567}{15{,}5} = 37 \text{ cm}$$

Wollte man diese Länge noch herabmindern, so kann man zur Auflagerung Klinkermauerwerk in Zementmörtel anordnen mit $k_d = 25$ kg/qcm. Doch hat man zu beachten, daß nach dem oben Gesagten bei einem N. Pr. Nr. 40 die Auflagerlänge mindestens $\frac{3}{4} \cdot 40 = 30$ cm betragen muß.

c) Anordnung einer Auflagerplatte auf gewöhnlichem Mauerwerk. Wählt man die Breite der Platte (Gußeisen) zu $b = 30$ cm und die Stärke $\delta = 3{,}0$ cm, so beträgt der Überstand auf einer Seite $c = \frac{30 - 15{,}5}{2} = 7{,}25 \text{ cm} < 3\delta$. Erforderlich ist wie unter a) eine Fläche $F = \frac{6800}{7} = 970$ qcm. Mithin wird die Länge der Platte:

$$x_2 = \frac{970}{30} = 33 \text{ cm}.$$

C. Schub- und Scherfestigkeit.

1. Allgemeines.

Bei der Scherfestigkeit wirken die äußeren Kräfte nicht senkrecht zur Querschnittsfläche, wie bei der Zug- und Druckfestigkeit, sondern in der Querschnittsfläche selbst. Daher treten auch die inneren Kräfte, die Schubspannungen oder Scherspannungen in der Richtung der Querschnittsfläche auf (es spielt sich derselbe Vorgang ab, wie bei Benützung einer Schere, daher auch der Name).

Bei der Berechnung kann man genügend genau annehmen, daß die abscherenden Kräfte sich gleichmäßig über den ganzen, auf Abscherung beanspruchten Querschnitt verteilen, so daß also in jeder Flächeneinheit auch die gleiche Scherspannung auftritt. Ist daher wieder P die äußere, angreifende Kraft in kg, F die abzuscherende Querschnittsfläche in cm^2 und k_s die zulässige Scherspannung in kg/qcm, so muß, falls Gleichgewicht vorhanden sein soll, werden:

$$P = F \cdot k_s \qquad (11)$$

woraus: $F = \frac{P}{k_s}$ und $k_s = \frac{P}{F}$.

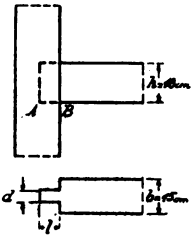


Fig. 74.

k_s wird durch Versuche ermittelt. Bei Metallen ist die Schubfestigkeit etwa gleich $\frac{4}{5}$ der Zug- bzw. Druckfestigkeit, bei Nadelholz ungefähr $\frac{1}{8} - \frac{1}{10}$, bei Stein $= \frac{1}{13}$, bei Zementmörtel $= \frac{1}{6}$. Hieraus kann man k_s durch Annahme eines entsprechenden Sicherheitsgrades bestimmen.

Beispiel 1. Der Zapfen eines Riegels aus Kiefernholz hat eine Kraft $P = 2640$ kg auf den Pfosten zu übertragen. Die Abmessungen des Zapfens sind zu bestimmen (Fig. 74).

a) **Berechnung auf Abscheren.** Bei der Abscherung des Holzes hat man zu unterscheiden, ob die Abscherung parallel oder senkrecht zur Faser erfolgt. Parallel zur Faser ist die Scherfestigkeit erheblich geringer, als senkrecht dazu (Versuch mit dem Taschenmesser an einem Stück Holz: das Holz spaltet sich leichter, als es sich quer durchschneiden läßt). Die Abscherung des Zapfens erfolgt senkrecht zur Faser, daher ist nach Tabelle $k_s = 60$ kg zu setzen. Gegeben ist $P = 2640$ kg. Mithin wird:

$$F = \frac{P}{k_s} = \frac{2640}{60} = 44 \text{ qcm}.$$

Die abzuscherende Fläche wird $F = d \cdot h$ (Fig. 74). Gegeben ist $h = 18$ cm, man erhält also:

$$18d = 44, \quad d = \frac{44}{18} = 2{,}5 \text{ cm}.$$

Der Zapfen hat aber auch in der Ebene AB den Druck $P = 2640$ kg zu übertragen.

b) Berechnung auf Druck. Gegeben $P = 2640$ kg; $k_d = 60 \frac{\text{kg}}{\text{qcm}}$ nach Tabelle. Erforderlich wird eine Auflagerfläche (Fig. 74):

$$F_1 = d \cdot l = \frac{P}{k_d} = \frac{2640}{60} = 44 \text{ qcm}.$$

Da $d = 2{,}5$ cm gefunden war, wird die Auflagerlänge:

$$l = \frac{44}{d} = \frac{44}{2{,}5} = 18 \text{ cm}.$$

Diese Zapfenlänge ist zu groß. Man muß daher d größer nehmen. Wählt man, wie üblich $d = \frac{1}{3} b$, also $d = \frac{15}{3} = 5$ cm, so erhält man:

$$l = \frac{44}{5} = 9 \text{ cm}.$$

II. Berechnung von Niet-, Schrauben- und Bolzenverbindungen.

a) **Allgemeines.** Die genannten Verbindungsmittel dienen zur Verbindung von Eisenkonstruktionen und haben die Stabkräfte der Konstruktion auf andere Bauteile zu übertragen. Niete sind unlösbare Verbindungsmittel.

Man unterscheidet einschnittige, zweischnittige und mehrschnittige Verbindungsmittel, je nachdem ein, zwei oder mehrere Querschnitte abzuscheren sind, wenn eine vollständige Trennung der zu verbindenden Bauteile erfolgen soll.

Die Zerstörung kann erfolgen

1. Durch zu große Beanspruchung des Nietes auf Abscheren,
2. Durch zu große Beanspruchung des Nietes auf Druck (Lochleibungsdruck).

Zu berechnen sind: die Stärke des Nietschaftes d, die Anzahl der Niete und der Abstand der Niete.

Zweckmäßig wählt man den Nietdurchmesser gleich der doppelten kleineren Blechstärke δ, also $d = 2\delta$. Als Nietdurchmesser kommen gemäß Min. Erlaß in Frage die Werte $d = 12$, 16, 20, 23 und 26 mm.

Weniger als zwei Niete sollen zur Befestigung eines Stabes nicht verwendet werden. — Das über Niete Gesagte gilt sinngemäß auch für Schraubenverbindungen.

b) Einschnittige Nietverbindungen. Die Trennung durch Abscheren erfolgt in der Ebene AB (Fig. 75). Ist die Tragkraft des Nietquerschnittes auf Abscherung $= N_a$, so ist für den Fall des Gleichgewichts:

$$N_a = F \cdot k_s$$

und da: $F = \frac{d^2\pi}{4}$,

$$N_a = \frac{d^2\pi}{4} \cdot k_s \quad (12)$$

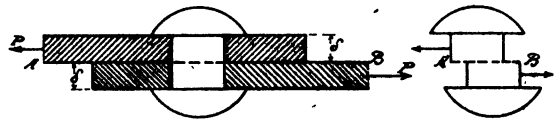


Fig. 75.

Infolge der Kraftwirkung wird sich der Niet im oberen Teile der beiden zu verbindenden Querschnitte bei I, im unteren bei II fest anlegen und die Leibung des Loches drücken (Fig. 76). Die Zerstörung erfolgt

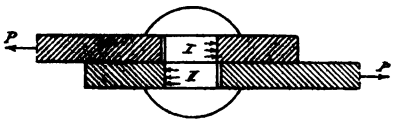


Fig. 76.

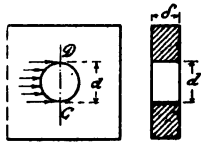


Fig. 77.

durch Zerquetschen. Man kann genügend genau annehmen, daß dieser Lochleibungsdruck sich gleichmäßig über die Projektion des Mantels, also auf die Ebene CD verteilt (Fig. 77). Ist k_l der zulässige Lochleibungsdruck, so wird demnach die Tragkraft eines einschnittigen Nietes auf Lochleibungsdruck:

$$N_l = F \cdot k_l, \quad \text{und da:} \quad F = d \cdot \delta$$

$$N_l = d \cdot \delta \cdot k_l. \quad (13)$$

In der Regel nimmt man an $k_l = 2k_s$. Gemäß Min. Erlaß ist für Niete und gedrehte Schraubenverbindungen zu setzen: $k_s = 1000$ kg/qcm, $k_l = 2000$ kg/qcm; bei gewöhnlichen Schraubbolzen ist höchstens $k_s = 750$ kg/qcm und $k_l = 1500$ kg/qcm zu nehmen.

Wird die Tragkraft eines Nietes auf Abscherung kleiner als auf Lochleibungsdruck, so ist erstere für die Bestimmung der Nietzahl maßgebend.

c) Zweischnittige Nietverbindungen. Die Abscherung erfolgt in zwei Querschnitten (Fig. 78), nämlich in den Ebenen *AB* und *CD*. Die Tragfähigkeit eines solchen Nietes auf Abscherung ist also doppelt so groß als die eines einschnittigen und beträgt somit:

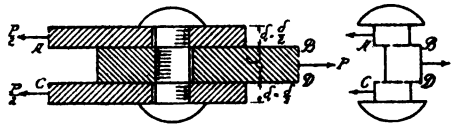


Fig. 78.

$$N_a = 2 \cdot \frac{d^2\pi}{4} \cdot k_s \cdot \qquad (14)$$

Aus Fig. 78 ergibt sich, daß der Niet sich im oberen Teile rechts, im mittleren links, im unteren rechts an die zu verbindenden Bauteile anlegen wird. Daher ist wieder die Tragkraft eines zweischnittigen Nietes auf Lochleibungsdruck:

$$N_l = d \cdot \delta \cdot k_l. \qquad (15)$$

Meist ist $\delta = 2\delta_1$. Trifft dies nicht zu, so ist stets der kleinere der beiden Werte δ bzw. $2\delta_1$ einzuführen, d. h. also derjenige, bei welchem sich für N_l die geringere Tragfähigkeit und somit die größere Nietzahl ergibt.

Auch bei zweischnittigen Nietverbindungen ist wieder die Tragkraft auf Abscherung in Rechnung zu ziehen, wenn sie geringer ist als die auf Lochleibungsdruck. Doch sind zweischnittige Niete in der Regel auf Lochleibungsdruck, einschnittige auf Abscherung zu berechnen.

Die Anzahl n der Niete erhält man, wenn P die angreifende Kraft ist, aus $n = \frac{P}{N_a}$, bzw. $n = \frac{P}{N_l}$.

d) Berechnung des Nietabstandes. Von der Ableitung soll abgesehen werden.

Der Abstand der Nietes vom Blechrand (Fig. 79) soll mindestens betragen $a = 1{,}5\,d$ (besser $a = 2\,d$).

Der Abstand der einzelnen Niete voneinander wird meist gewählt $e = 3\,d$ (mindestens $e = 2{,}5\,d$); bei Kraftnietungen vergrößert man ihn bis auf $e = 5\,d$.

Niete mit versenkten Köpfen bedingen eine Vergrößerung des Abstandes, meist macht man $e = 3{,}3\,d$.

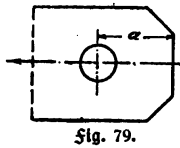


Fig. 79.

Bei gezogenen Stäben hat man zu beachten, daß die Schwächung des Querschnittes durch die Nietlöcher bei der Bemessung zu berücksichtigen ist, mithin nur der nutzbare Querschnitt in Frage kommt.

Man ordnet hierbei die Niete stets so an, daß in der ersten Nietreihe möglichst nur ein Niet, in jeder folgenden Reihe ein Niet mehr als in der vorhergehenden angebracht wird. Man hat dann die Stabbreite nur um den Nietdurchmesser d größer zu machen, als die Rechnung für den nutzbaren Querschnitt ergab.

Beispiel 2. Ein I-Träger N. Pr. 32 soll an einem Träger N. Pr. 40 mit $\lfloor 100 \cdot 100 \cdot 10$ angeschlossen werden und überträgt an letzteren eine Last $P = 14000$ kg. Die zum Anschluß erforderliche Nietzahl ist zu bestimmen.

a) Berechnung der einschnittigen Niete. Die zum Anschluß der Winkeleisen an den Hauptträger dienenden Niete sind einschnittig (Fig. 80). Die Tragkraft eines solchen Nietes ist daher:

$$N_a = \frac{d^2\pi}{4} \cdot k_s .$$

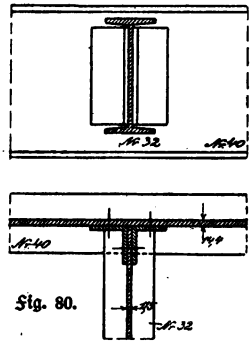


Fig. 80.

Verwendet man Niete von 23 mm Φ, so wird demnach:

$$N_a = \frac{2{,}3^2 \cdot 3{,}14}{4} \cdot 1000 = 4155 \text{ kg}.$$

Die Tragkraft eines Nietes auf Lochleibungsdruck folgt aus: $N_l = d \cdot \delta \cdot k_l$

oder da: $d = 2{,}3$ und $\delta = 1{,}0$:

$$N_l = 2{,}3 \cdot 1{,}0 \cdot 2000 = 4600 \text{ kg}.$$

Da $N_a < N_l$, so erhält man die Anzahl der Niete aus:

$$n = \frac{P}{N_a} = \frac{14000}{4155} = 4 \text{ Niete}.$$

Mit Rücksicht auf die große Höhe des Trägers sollen jedoch auf jeder Seite 3 Niete angeordnet werden, obschon nach der Rechnung 2 Niete genügen würden.

b) Berechnung der zweischnittigen Niete. Sie finden nach Fig. 80 zum Anschluß der Winkeleisen an den Nebenträger Verwendung. Wählt man Niete von 16 mm Φ, so ist die Tragkraft eines Nietes auf Abscherung:

$$N_a = 2 \cdot \frac{d^2\pi}{4} \cdot k_s = 2 \cdot \frac{1{,}6^2 \cdot 3{,}14}{4} \cdot 1000 = 4020 \text{ kg}$$

und die Tragkraft eines Nietes auf Lochleibungsdruck:

$$N_l = d \cdot \delta \cdot k_l = 1{,}6 \cdot 1{,}15 \cdot 2000 = 3680 \text{ kg}.$$

Die Anzahl der Niete folgt, da $N_l < N_a$, aus:

$$n = \frac{P}{N_l} = \frac{14000}{3680} = 4 \text{ Niete.}$$

Aus praktischen Gründen wählt man zweckmäßig möglichst nur eine Nietstärke, z. B. hier nur 23 mm. Hiervon werden mit Rücksicht auf Lochleibungsdruck 3 Niete genügen.

Beispiel 3. Ein Bolzen wird durch eine in seiner Achse wirkende Zugkraft $P = 9600$ kg beansprucht. Der Bolzendurchmesser und die Höhe des Kopfes sind zu berechnen (Fig. 81).

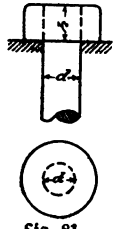


Fig. 81.

Lösung. a) Berechnung des Bolzendurchmessers. Gegeben $P = 9600$ kg, $k_z = 1200$ kg/qcm. Der erforderliche Querschnitt wird:

$$F = \frac{P}{k_z}; \quad F = \frac{d^2\pi}{4}; \quad \frac{d^2\pi}{4} = \frac{P}{k_z} = \frac{9600}{1200} = 8 \text{ qcm}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 8}{3{,}14}} = 3{,}2 \text{ cm.}$$

b) Berechnung der Kopfhöhe des Bolzens. Die Kraft P sucht den Schaft des Bolzens aus dem Kopf herauszuziehen. Der Kopf wird also auf Abscherung beansprucht. Die Scherfläche hat Ringform von der Breite h. Gegeben $P = 9600$ kg; $k_s = 750$ kg. Mithin wird:

$$F = \frac{P}{k_z} = \frac{9600}{750} = \sim 13 \text{ qcm}, \quad F = d\pi h = 3{,}2 \cdot 3{,}14 \cdot h,$$

$$h = \frac{13}{3{,}2 \cdot 3{,}14} = 1{,}3 \text{ cm.}$$

Man macht die Kopfhöhe jedoch mindestens gleich dem Bolzendurchmesser.

D. Biegungsfestigkeit.

1. Allgemeines. Trägheitsmoment. Die allgemeine Biegungsgleichung.

Wird ein auf zwei Stützen aufliegender Balken von lotrechten Kräften belastet, oder wirkt am freien Ende eines Balkens, dessen anderes Ende eingespannt ist, eine Last, so erfährt der Balken in jedem Falle eine Biegung.

Denkt man sich den Balken, wie es beim Holzbalken tatsächlich der Fall ist, aus einzelnen Fasern bestehend, welche gleichlaufend zur Längsachse des Balkens sind, so werden beim Balken auf zwei Stützen die oberen Fasern verkürzt, die unteren verlängert (Fig. 82), beim Balken

mit freischwebendem Ende dagegen die oberen Fasern verlängert, die unteren verkürzt (Fig. 83). Mit einer Reißschiene läßt sich der Versuch einfach bewerkstelligen. Von zwei sehr nahe aneinander liegenden Querschnitten AB und CD (Fig. 83), welche vor der Biegung eben und parallel waren, kann man nach der Biegung annehmen, daß sie wohl noch eben sind, aber sie werden eine zueinander geneigte Lage einnehmen. Zieht man durch den Schwerpunkt S' des Querschnittes CD die Linie $C'D' \parallel AB$, so stellen die Abschnitte zwischen CC' und DD' die Verlängerungen, bzw. Verkürzungen der einzelnen Faserabschnitte dar, welche vor der Biegung sämtlich die Länge SS' hatten. EE' ist also die Verlängerung einer Faser im Abstande x von S. Man erkennt aus der Figur, daß die Längenänderungen nach dem Schwerpunkte hin abnehmen und dort den Wert 0 erreichen, ferner, daß die größten Längenänderungen in den äußersten Fasern CC' und DD' auftreten, sowie, daß infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke SCC' und $SD'D$ die Verlängerungen und Verkürzungen einer Faserschicht ihren Entfernungen von der durch S' gehenden wagerechten Achse des Querschnittes unmittelbar proportional sind. Die durch diese Achse gehende Faserschicht, in der die Fasern also dehnungslos und somit auch spannungslos sind, nennt man die neutrale Faserschicht. Sie schneidet jeden durch den Körper gelegten Querschnitt in einer geraden Linie, welche die neutrale Achse (Nullachse) des Querschnittes genannt wird.

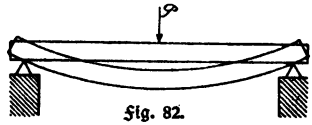


Fig. 82.

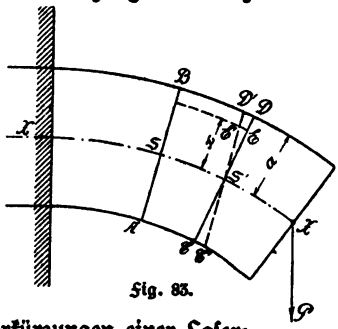


Fig. 83.

Da sich nach dem Hookeschen Gesetz die Dehnungen wie die Spannungen verhalten, so ist auch die Spannung (Zug- oder Druckspannung) der einzelnen Faserschichten proportional zur Entfernung von der neutralen Faser.

Bezeichnet man mit s die Spannung im Abstande x von der Nullachse und mit k_b die Spannung in der äußersten Faser, so ist demnach:

$$\frac{s}{k_b} = \frac{x}{a}, \quad \text{mithin:} \quad s = k_b \cdot \frac{x}{a}.$$

Die inneren Spannungen müssen den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Denkt man sich den Balken, dessen Querschnitt symmetrisch angenommen werden soll, durch eine im Abstande z vom Ende gelegte Schnittebene in zwei Teile zerschnitten (Fig. 84), so muß man, wenn der Gleichgewichtszustand gewahrt bleiben soll, an der Schnittstelle solche äußere Kräfte anbringen, welche dieselbe Wirkung hervorrufen, wie zuvor die inneren Spannungen.

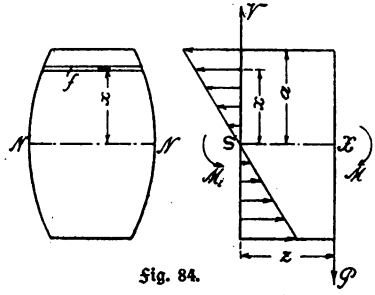


Fig. 84.

Für das kurze Balkenstück XS', welches man wagerecht annehmen kann, da die Biegung in der Regel nur sehr gering ist, sind die drei allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anzuwenden.

Nach der ersten Bedingung $\Sigma V = 0$ muß demnach an der Schnittstelle die Querkraft

$$V = P$$

angebracht werden, welche die Verschiebung des Balkenstückes in der Schnittebene hindert. (Wirken mehrere äußere Kräfte mit der Mittelkraft R auf das Balkenstück, so ist natürlich $V = R$.)

Als wagerechte Kräfte kommen nur die inneren Spannungen in Frage (in Fig. 84 Zugspannungen nach links, Druckspannungen nach rechts gerichtet). Nach der zweiten Gleichgewichtsbedingung $\Sigma H = 0$ muß deren algebraische Summe gleich Null sein.

Denkt man sich nun die Querschnittsfläche in sehr schmale Streifen vom Flächeninhalt f gleichlaufend zur Neutralen NN zerlegt, so ist $f \cdot s$ der auf einen Streifen kommende Spannungswiderstand. Ist $\Sigma f \cdot s$ die Summe aller dieser Spannungen, so muß also sein:

$$\Sigma f \cdot s = 0$$

und mit dem oben gefundenen Werte für s:

$$\Sigma f \cdot k_b \cdot \frac{x}{a} = 0 \quad \text{oder:} \quad \frac{k_b}{a} \cdot \Sigma f \cdot x = 0.$$

Bringt man den gleichbleibenden (konstanten) Faktor $\frac{k_b}{a}$ auf die rechte Seite, so verschwindet er durch Multiplikation mit Null und es bleibt:

$$\Sigma f \cdot x = 0.$$

Der Ausdruck $\Sigma f \cdot x$ ist nichts anderes als die Summe der statischen Momente aller Flächenteilchen f der Querschnittsfläche in bezug auf die Achse NN.

Nach der dritten Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ muß in bezug auf die Achse N das rechts drehende Moment M der äußeren Kräfte gleich dem links drehenden Moment M_i der in der Schnittfläche wirkenden Spannungen sein.

Das statische Moment des Spannungswiderstandes der im Abstande x von der Neutralen befindlichen Faser ist $= fs \cdot y$, mithin ist:

$$M = \Sigma f s y$$

und da $s = k_b \cdot \frac{y}{a}$, so erhält man:

$$M = \Sigma f \cdot k_b \cdot \frac{y}{a} \cdot y.$$

Bringt man den gleichbleibenden Faktor $\frac{k_b}{a}$ vor das Summenzeichen, das bekanntlich wie eine Klammer wirkt, so wird:

$$M = \frac{k_b}{a} \cdot \Sigma f y^2.$$

Den Ausdruck $\Sigma f y^2$ nennt man das **Trägheitsmoment** des Querschnittes.

Das Trägheitsmoment eines Querschnittes ist demnach gleich der Summe aller Flächenteilchen des Querschnittes multipliziert mit dem Quadrate ihrer Abstände von der Drehachse.

Man bezeichnet das Trägheitsmoment mit dem Buchstaben J, so daß also:

$$J = \Sigma f y^2 \quad \text{und} \quad M = \frac{k_b}{a} \cdot J = k_b \cdot \frac{J}{a} \cdot \tag{16}$$

Den Ausdruck $\frac{J}{a}$ (Trägheitsmoment dividiert durch Abstand der äußersten Faser von der Neutralen) nennt man das **Widerstandsmoment** des Querschnittes und bezeichnet es mit W. Es ist somit:

$$W = \frac{J}{a} \tag{17}$$

und demnach auch: $M = k_b \cdot W$, (18)

woraus folgt:

In jedem Querschnitt muß das Moment der äußeren Kräfte kleiner oder höchstens gleich sein dem Produkt aus der zulässigen Beanspruchung der äußersten Faser und dem Widerstandsmomente.

Man nennt die Gleichung $M = k_b \cdot W$ die **Biegungsgleichung.**

Da f eine Fläche (Breite mal Höhe) bedeutet, so ist das **Trägheitsmoment** stets eine Größe vierten Grades und wird daher mit cm^4 bezeichnet; entsprechend ist das Widerstandsmoment eine Größe dritten Grades und wird mit cm^3 bezeichnet.

II. Bestimmung der Trägheitsmomente.

a) **Trägheitsmoment für rechteckigen Querschnitt.** Es ist $J = \Sigma f x^2$. Man zerlegt den rechteckigen Querschnitt in eine sehr große Zahl sehr schmaler Streifen f von gleicher Höhe, also auch gleichem Inhalte. Die Schwerpunkte dieser Streifen haben von der neutralen Faser die Abstände x_1, x_2, x_3 ... (Fig. 85). Das Trägheitsmoment eines solchen Streifens ist daher fx^2, und damit das Trägheitsmoment für den halben Querschnitt:

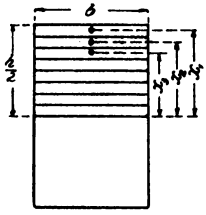


Fig. 85.

$$\frac{J}{2} = f \cdot x_1^2 + f \cdot x_2^2 + f \cdot x_3^2 + f \cdot x_4^2 + \cdots$$

Jeden Summanden auf der rechten Seite kann man als den Rauminhalt eines Prismas mit quadratischer Grundfläche und der Höhe f betrachten. Denkt man sich diese Prismen sämtlich aufeinandergesetzt, so entsteht, da die Abstände x nach der Neutralen zu immer kleiner werden, ein abgetreppter Körper, der sich einer Pyramide umsomehr nähert, je schmaler die Streifen f und je kleiner damit ihre Inhalte und auch die Höhen f werden, und der in eine Pyramide übergeht, sobald f unendlich klein gewählt wird. Die rechte Seite obiger Gleichung kann also als Inhalt einer Pyramide von der Grundfläche $G = x_1^2$ und einer Höhe H aufgefaßt werden, welche gleich der Summe aller Streifen f (Σf) ist. Nun ist aber für den halben Querschnitt auch $\Sigma f = \frac{b \cdot h}{2}$, und da der Inhalt einer Pyramide $V = G \cdot \frac{H}{3}$ ist, so erhält man: $\frac{J}{2} = G \cdot \frac{H}{3} = x_1^2 \cdot \frac{1}{3} \sum f = x_1^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{bh}{2}$.

Sind diese Streifen unendlich schmal angenommen, so geht x_1 in $\frac{h}{2}$ über,

und es wird: $\frac{J}{2} = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot \frac{bh}{6} = \frac{bh^3}{24}$.

Für den ganzen Querschnitt wird daher:

$$J = 2 \cdot \frac{bh^3}{24}$$

$$J = \frac{bh^3}{12}.$$

Der Abstand der äußersten Faser von der Neutralen ist $a = \frac{h}{2}$, mithin wird das Widerstandsmoment: $W = \frac{J}{a} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{2bh^3}{12h}$

$$W = \frac{bh^2}{6}.$$

Bei quadratischem Querschnitt ist $b = h$, mithin erhält man:

$J = \frac{h^4}{12}$ und $W = \frac{h^3}{6}$.

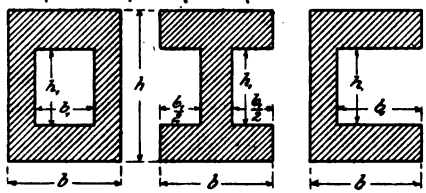


Fig. 86.

Die abgeleiteten Formeln kann man zur Bestimmung der Trägheitsmomente von solchen zusammengesetzten Querschnitten benutzen, welche aus Rechtecken bestehen. Für die in den Abb. 86a—c dargestellten Formen (darunter I und ⊏ Eisen) ermittelt man z. B. das Trägheitsmoment für den vollen rechteckigen Querschnitt und zieht davon das Trägheitsmoment der Hohlräume ab. Man erhält für alle drei Formen gleichmäßig:

$$J = \frac{bh^3}{12} - 2 \cdot \frac{\frac{b_1}{2} \cdot h_1^3}{12} = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{12}$$

und da: $a = \frac{h}{2}$: $\qquad W = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{6h}$.

Eine Zusammenstellung der Trägheitsmomente für die wichtigsten vorkommenden Bauformen findet man in allen Tabellen und Baukalendern, so daß hier auf diese verwiesen sei.

b) Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Querschnittes in bezug auf eine zur Schwerachse parallele Achse. Das Trägheitsmoment J_s einer Fläche für die Schwerachse SS ist (Fig. 87):

$$J_s = \sum f \cdot x^2.$$

Bezeichnet p den veränderlichen Abstand der Streifen der Fläche von einer Achse $PP \parallel SS$, so ist das Trägheitsmoment der Fläche in bezug auf diese Achse:

$$J_p = \sum f z^2.$$

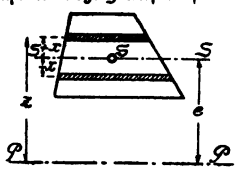


Fig. 87.

Die Flächenteilchen f des Querschnittes liegen zu beiden Seiten der Schwerachse; daher ist:

$$z = e \pm x,$$

mithin auch: $J_p = \sum f (e \pm x)^2 = \sum f (e^2 \pm 2ex + x^2)$

oder: $J_p = \sum f e^2 \pm \sum f \cdot 2ex + \sum f x^2$

$J_p = e^2 \sum f + 2e \sum f \cdot x + \sum f x^2$.

Σf ist die Gesamtfläche des Querschnittes, also $\Sigma f = F \cdot \Sigma f x$ ist das statische Moment aller Flächenteilchen für die Schwerachse; dies ist nach früherem also $= 0$, so daß $\Sigma f \cdot x = 0$ und damit auch $2e \cdot \Sigma f \cdot x = 0$. Endlich ist $\Sigma f x^2 = J_s$. Man erhält daher:

$$J_p = e^2 \cdot F + J_s \quad \text{oder:} \quad J_p = J_s + F \cdot e^2 \tag{19}$$

d. h. Das Trägheitsmoment eines Querschnittes in bezug auf eine zur Schwerachse gleichlaufende Achse ist gleich dem Trägheitsmoment J_s für diese Schwerachse vermehrt um das Produkt aus der Querschnittsfläche F und dem Quadrate des Abstandes e der beiden Achsen.

Dieser wichtige Satz ist häufig anzuwenden.

c) **Hauptträgheitsmomente.** Durch den Schwerpunkt eines Querschnittes lassen sich unzählige Schwerachsen ziehen, und für jede kann ein Trägheitsmoment aufgestellt werden. Von allen diesen Trägheitsmomenten sind zwei von besonderer Wichtigkeit, nämlich das größte Trägheitsmoment (J_{max}) und das kleinste Trägheitsmoment (J_{min}). Beide heißen

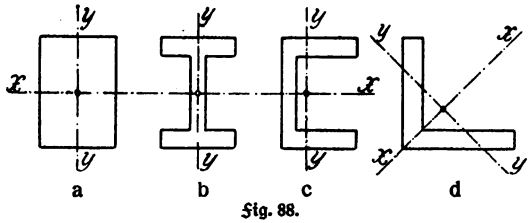
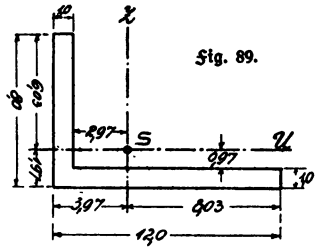


Fig. 88.

Hauptträgheitsmomente und ihre zugehörigen Achsen Hauptachsen. Die Hauptachsen stehen senkrecht zueinander. Die Hauptachse für J_{max} heißt erste Hauptachse und ihr Trägheitsmoment wird mit J_x bezeichnet; die Hauptachse für das J_{min} nennt man zweite Hauptachse und bezeichnet ihr Trägheitsmoment mit J_y (Fig. 88a—d).

d) **Beispiele.** In den Figuren 86a—c waren für einige Querschnitte Trägheitsmomente und Widerstandsmomente für die erste Hauptachse durch Ergänzung zu einem vollen rechteckigen Querschnitt bereits ermittelt worden. Dieses Verfahren läßt sich jedoch offenbar nur dann anwenden, wenn die Schwerpunkte der Teilflächen auf der Schwerachse des Vollquerschnittes liegen. Ist dies nicht der Fall, so muß man das Trägheitsmoment jeder Teilfläche in bezug auf die zu ersterer gleichlaufende Schwerachse des Teilquerschnittes berechnen und dann das Trägheitsmoment für die Schwerachse des Vollquerschnittes mit Hilfe der Beziehung $J_p = J_s + F \cdot e^2$ bestimmen. Bei letzterem Verfahren wird man häufig vorteilhafter den Querschnitt zerlegen, statt ihn zu ergänzen,

Beispiel 1. Die Trägheitsmomente des in Fig. 89 gegebenen Winkeleisen-Querschnittes sind für die *U*- und *Z*-Achse zu ermitteln[1]).



Lösung. Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes für die *U*-Achse denkt man sich die Figur zerlegt in das Rechteck oberhalb dieser Achse und in ein Rechteck unterhalb der Achse von der Breite 12,0 cm und der Höhe 1,97 cm, von welchem ein Rechteck von der Breite (12,0 — 1,0) = 11,0 cm und der Höhe (1,97 — 1,0) = 0,97 cm abgeht. Die Trägheitsmomente dieser Rechtecke sind auf die zu ihrer Schwerachse gleichlaufende *U*-Achse zu beziehen, also mit Hilfe der Gleichung $J_p = J_s + F \cdot e^2$ zu ermitteln. Dementsprechend wird:

$$J_u = J_1 + J_2 - J_3$$

$$J_1 = \frac{bh^3}{12} + F \cdot e^2 = \frac{1{,}0 \cdot 6{,}03^3}{12} + 6{,}03 \cdot 1{,}0 \cdot \left(\frac{6{,}03}{2}\right)^2 = 73{,}08 \text{ cm}^4$$

$$J_2 = \frac{12{,}0 \cdot 1{,}97^3}{12} + 12{,}0 \cdot 1{,}97 \cdot \left(\frac{1{,}97}{2}\right)^2 = 38{,}25 \text{ cm}^4$$

$$J_3 = \frac{11{,}0 \cdot 0{,}97^3}{12} + 11{,}0 \cdot 0{,}97 \cdot \left(\frac{0{,}97}{2}\right)^2 = 3{,}33 \text{ cm}^4$$

mithin:

$$J_u = 73{,}08 + 38{,}25 - 3{,}33 = 108{,}0 \text{ cm}^4.$$

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes für die *Z*-Achse verfährt man in gleicher Weise. Es ist:

$$J_z = I_1 + I_2 - I_3$$

$$J_1 = \frac{1{,}0 \cdot 8{,}03^3}{12} + 1{,}0 \cdot 8{,}03 \cdot \left(\frac{8{,}03}{2}\right)^2 = 171{,}98 \text{ cm}^4$$

$$J_2 = \frac{8{,}03 \cdot 3{,}97^3}{12} + 8{,}03 \cdot 3{,}97 \cdot \left(\frac{3{,}97}{2}\right)^2 = 167{,}48 \text{ cm}^4$$

$$J_3 = \frac{7{,}0 \cdot 2{,}97^3}{12} + 7{,}0 \cdot 2{,}97 \cdot \left(\frac{2{,}97}{2}\right)^2 = 61{,}13 \text{ cm}^4$$

demnach: $J_z = 171{,}98 + 167{,}48 - 61{,}13 = 278{,}3 \text{ cm}^4$.

J_u und J_z sind zwar nicht die beiden Hauptträgheitsmomente des Winkeleisens (vgl. Fig. 88 d), doch sind sie hinsichtlich der Verwendung derartiger Eisen bei den Konstruktionen die wichtigsten Trägheitsmomente.

Aus dem Zahlenbeispiel erkennt man, daß im zweiten Teile der Ansätze

1) Der Schwerpunkt des Profiles ist auf S. 32 ermittelt.

dieselben Zahlenwerte wiederkehren und sich von denen im ersten Teile nur durch den Nenner der Brüche unterscheiden. Es wird sich daher zur Berechnung von Trägheitsmomenten rechteckigen Querschnittes für eine zur Schwerachse gleichlaufende Achse eine einfache Formel finden lassen. Nach Fig. 90 ist das Trägheitsmoment:

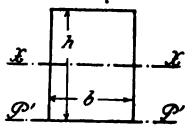


Fig. 90.

$$J'_p = J_x + F \cdot e^2 = \frac{bh^3}{12} + b \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4}$$

$$J'_p = \frac{bh^3}{3}.$$

Diese Formel ist also anwendbar, sobald die Achse, auf welche das Trägheitsmoment zu beziehen ist, mit einer Seite des Querschnittes zusammenfällt.

Beispiel 2. Das Trägheitsmoment des in Fig. 91 gegebenen Blechträgers soll für die X-Achse bestimmt werden.

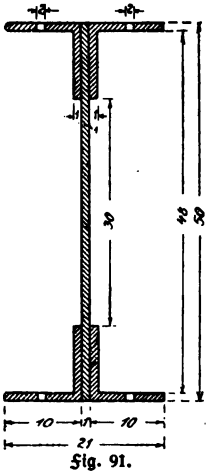


Fig. 91.

Lösung. Der Querschnitt wird zu einem vollen Rechteck ergänzt und seine Breite um zwei Nietbreiten vermindert. Dann erhält man:

$$J_x = \frac{1}{12}(21 - 2 \cdot 2) \cdot 50^3 - \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 7 \cdot 48^3 - \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 30^3$$

$$J_x = 177083 - 129024 - 4500$$

$$J_x = 43559 \text{ cm}^4.$$

Das Widerstandsmoment wird:

$$W_x = \frac{J_x}{a} = \frac{J_x}{\frac{h}{2}}; \quad \frac{h}{2} = 25 \text{ cm}$$

$$W_x = \frac{43559}{25} = 1742 \text{ cm}^3.$$

III. Trägerberechnungen.

a) Allgemeines. Bei der Berechnung eines Trägers ist stets folgender Rechnungsgang einzuhalten:

1. Feststellung der freien Länge und der Stützweite. Letztere (Entfernung von Auflagermitte zu Auflagermitte) ist der Berechnung stets zugrunde zu legen.

2. Ermittelung der Belastung nach Art, Größe und Lage an der Hand von Tabellen für Eigengewichte und Nutzlasten.

Die weitere Untersuchung erfolgt zeichnerisch oder rechnerisch, wie im ersten Abschnitte gezeigt wurde, nämlich:

3. Bestimmung der Auflagerdrücke.
4. Ermittelung des gefährlichen Querschnittes.
5. Berechnung des größten Biegungsmomentes.

Hierauf folgt mit Hilfe der Formeln des zweiten Abschnittes

6. Berechnung des nötigen Widerstandsmomentes.
7. Bestimmung des zu wählenden Querschnittes, gewöhnlich mit Hilfe von Tabellen.

Des öfteren ist auch notwendig, die in einem Bauteil auftretende Spannung zu ermitteln.

Da die erforderliche Auflagerlänge zunächst unbekannt ist, und somit die Stützweite l auch, genügt es, die Auflagerfläche mit $^1/_{10}$ der Lichtweite l_1, oder mit Hilfe der Beziehung:

$$l = 1{,}04\,l_1 + 0{,}1 \text{ (m)}$$

in Rechnung zu bringen.

Bei gleichmäßig belasteten Trägern rechnet man, um eine einfachere Rechnung zu erzielen, die gleichmäßige Belastung für die Längeneinheit als über die ganze Stützweite verteilt an, während sie sich nur über die Lichtweite erstreckt. Falsch ist es jedoch, die unter Beachtung der Lichtweite sich ergebende Gesamtlast als über die Stützweite verteilt zu betrachten, da hierbei die Belastung für die Längeneinheit zu gering und der Träger etwa um 10% zu schwach ausfallen würde.

Sind Wände von Trägern aufzunehmen, so wird bei $^1/_2$ Stein starken Wänden in der Regel nur ein Träger verwendet; haben die Wände mehr als $^1/_2$ Stein Stärke, so verlegt man mindestens zwei, bei starken Wänden häufig drei Träger, welche im allgemeinen gleiche Stärke erhalten.

b) Träger auf zwei Stützen mit Einzellasten.

Beispiel 1. Der Querschnitt des auf S. 46 untersuchten Trägers ist zu ermitteln (Fig. 44).

Lösung. Es war gefunden:

$$M_{max} = M_2 = 650\,000 \text{ kg/cm}.$$

Demnach ergibt sich das Widerstandsmoment aus:

$$W = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{650000}{1200} = 541{,}7 \text{ cm}^3,$$

wofür nach Tabelle genügt: ein I Träger N. Pr. Nr. 28 mit:

$$W = 541 \text{ cm}^3.$$

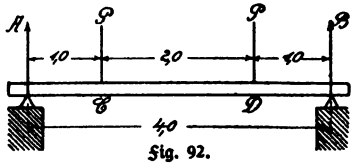


Fig. 92.

Beispiel 2. Das Profil eines flußeisernen Trägers von $l = 4{,}00$ m Stützweite ist für den Fall zu bestimmen, daß zwei Einzellasten $P = 3000$ kg im Abstande $a = 1{,}0$ m von jedem Auflager angreifen. (Fig. 92.)

Lösung. Der Fall ist auf S. 50 allgemein behandelt. Darnach wird:

Auflagerdruck $A = B = 3000$ kg.

Der gefährliche Querschnitt tritt an jeder Stelle des Trägers von C bis D auf. Das größte Biegungsmoment wird:

$$M_{max} = A \cdot a = P \cdot a = 3000 \cdot 100 = 300000 \text{ kgcm}.$$

Das Widerstandsmoment ist:

$$W = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{300000}{1200} = 250 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wird ein I-Eisen N. P. Nr. 22 mit $W_x = 278$ cm³.

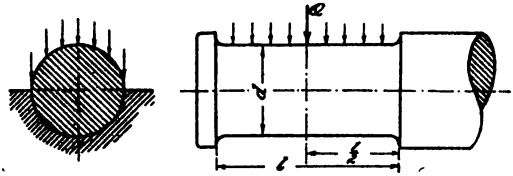


Fig. 93.

Beispiel 3. Ein aus schmiedbarem Eisen hergestellter Stirnzapfen wird mit 3000 kg beansprucht. Die Materialspannung soll $k_b = 500$ kg/qcm betragen. Welche Länge und welchen Durchmesser muß der Zapfen erhalten, wenn die zwischen Zapfen und Lager auftretende Spannung k_d 25 kg/qcm nicht übersteigen soll? (Fig. 93.)

Lösung. Nach der allgemeinen Biegungsgleichung ist:

$$M = k_b \cdot W$$

und da für kreisrunden Querschnitt:

$$W = \frac{d^3\pi}{32}, \text{ so folgt: } M = \frac{d^3\pi}{32} \cdot k_b = \sim 0{,}1\, d^3 \cdot k_b.$$

Der Zapfen kann als gleichmäßig belasteter Träger angesehen werden. Daher ist ferner auch:

$$M = \frac{Q \cdot l}{2},$$

mithin durch Gleichsetzung: $\frac{Q \cdot l}{2} = 0{,}1\, d^3 k_b$ oder: $Q = \frac{0{,}2\, d^3 k_b}{l}$.

Da nun $Q = F \cdot k_d = d \cdot l \cdot k_d$, so wird: $dlk_d = \frac{0{,}2\,d^3 k_b}{l}$, woraus:

$$\left(\frac{l}{d}\right)^2 = \frac{0{,}2\,k_b}{k_d} \quad \text{und} \quad \frac{l}{d} = \sqrt{\frac{0{,}2\,k_b}{k_d}} = \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 500}{25}} = 2,$$

d. h. die Länge des Zapfens muß doppelt so groß werden als der Durchmesser.
Weiter erhält man aus der oben gefundenen Gleichung:

$$\frac{Q \cdot l}{2} = 0{,}1\,d^3 k_b$$

durch Division mit d: $$\frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{d} = 0{,}1\,d^2 k_b$$

woraus: $$d = \sqrt{\frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{1}{0{,}1\,k_b}} = \sqrt{\frac{3000 \cdot 2}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 500}}$$

$$d = \sim 7{,}8 \text{ cm} \quad \text{und} \quad l = 2d = 15{,}6 \text{ cm}.$$

c) Träger auf zwei Stützen mit gleichmäßig verteilter Belastung.

Beispiel 1. Der auf S. 53 untersuchte Träger soll aus einem ⊏-Eisen bestehen. Welches Profil ist zu wählen?

Lösung. Gefunden war $M_{max} = 450000$ kgcm, mithin wird das erforderliche Widerstandsmoment:

$$W = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{450000}{1200} = 375 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wird ein ⊏-Eisen N. P. Nr. 28 mit $W_x = 450$ cm³.

Beispiel 2. Eine $1^1/_2$ Stein starke Mauer von 0,5 m Höhe soll durch zwei Träger von 6,0 m Lichtweite aufgenommen werden. Das Gewicht des Mauerwerks betrage 1800 kg/m³. Das Profil ist zu bestimmen.

Lösung. Zunächst ist die Stützweite des Trägers zu bestimmen mit Hilfe der Beziehung:

$$l = 1{,}04\,l_1 + 0{,}10\,(m) = 1{,}04 \cdot 6{,}0 + 0{,}10 = 6{,}34 \text{ m}.$$

Die gleichmäßig verteilte Belastung wird demnach:

$$Q = 0{,}39 \cdot 5{,}0 \cdot 6{,}34 \cdot 1800 = 22253 \text{ kg} = \sim 22300 \text{ kg}.$$

Der gefährliche Querschnitt liegt in der Mitte, mithin ist:

$$M_{max} = \frac{Q \cdot l}{8} = \frac{22300 \cdot 634}{8} = 1767300 \text{ kgcm}$$

$$W_x = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{1{,}767300}{1200} = 1473 \text{ cm}^3.$$

Auf einen Träger kommt demnach:

$$\frac{W_x}{2} = \frac{1473}{2} = 737 \text{ cm}^3.$$

Gewählt werden: 2 I-Träger N. P. Nr. 32 mit je $W_x = 781$ cm³ und $G = 61$ kg/m, so daß für beide Träger also $W_x = 781 \cdot 2 = 1562$ cm³ und $G = 61 \cdot 2 = 122$ kg/m wird.

Durch das Eigengewicht kommt hierzu eine Belastung:

$$Q_1 = 6{,}34 \cdot 122 = \sim 775 \text{ kg}.$$

Diese ruft hervor ein Biegungsmoment:

$$M_{max} = \frac{775 \cdot 634}{8} = 61420 \text{ kgcm},$$

welches erfordert: $W_x' = \frac{61420}{1200} = 51{,}2 \text{ cm}^3$,

so daß das gesamte Widerstandsmoment sein muß:

$$W = W_x + W_x' = 1473 + 51{,}2 = 1524{,}2 \text{ cm}^3.$$

Da $W = 1562$ cm³ vorhanden ist, so genügt das gewählte Profil auch für Eigengewicht.

An Stelle der beiden I-Träger hätte man auch zwei Differdinger Träger Nr. 24 B mit je $W_x = 855$ cm³ und $G = 76{,}0$ kg/m wählen können. Die Untersuchung für das Eigengewicht wäre in gleicher Weise zu führen und würde ergeben ein erforderliches Gesamtwiderstandsmoment $W = 1537$ cm³. Vorhanden ist aber $W = 2 \cdot 855 = 1710$ cm³, so daß die gewählten Profile auch hierfür genügen. Andernfalls wäre das Profil größer zu nehmen.

d) Träger auf zwei Stützen mit Streckenbelastung.

Beispiel 1. Für einen I-Träger ist $M_{max} = 192000$ kg ermittelt. Das Trägerprofil ist zu bestimmen.

Lösung. Gefunden war $M_{max} = 192000$ kgcm, mithin wird:

$$W_x = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{192000}{1200} = 160 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wird ein I-Eisen N. P. Nr. 18 mit $W_x = 161$ cm³.

Beispiel 2. Ein Balken aus Kiefernholz hat eine 3,0 m hohe, ½ Stein starke Zwischenmauer aus Ziegelsteinen aufzunehmen, welche über einem 5,00 m breiten Raume liegt. In ihr befindet sich nach Fig. 94 eine Türöffnung von 1,00 m Breite und 2,00 m Höhe. Da die Balkenlage des Obergeschosses parallel zur Mauer läuft, so belastet sie den Balken nicht. Der Querschnitt des Balkens ist zu bestimmen (Fig. 94).

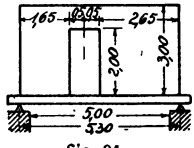


Fig. 94.

Lösung. 1. Stützweite. Man erhält sie aus:

$$l = 1{,}04 l_1 + 0{,}10 = 1{,}04 \cdot 5{,}0 + 0{,}10 = 5{,}30 \text{ m}.$$

2. Lastermittelung. Man rechnet von der über der Tür befindlichen Mauerlast die Hälfte zur gleichmäßigen Belastung der Strecke AC, die andere zur Streckenlast BD hinzu. Da 1 cbm Ziegelmauerwerk 1800 kg wiegt, erhält man für die linksseitige Streckenlast:

$$Q_1 = (3{,}0 \cdot 2{,}15 - 2{,}0 \cdot 0{,}5) \cdot 0{,}14 \cdot 1800 = 1375 \text{ kg}$$

$$q_1 = \frac{1375}{165} = 8{,}3 \text{ kg/cm}$$

und für die rechtsseitige Streckenlast:

$$Q_2 = (3{,}0 \cdot 3{,}15 - 2{,}0 \cdot 0{,}5) \cdot 0{,}14 \cdot 1800 = 2130 \text{ kg}$$

$$q_2 = \frac{2130}{265} = 8{,}0 \text{ kg/cm}.$$

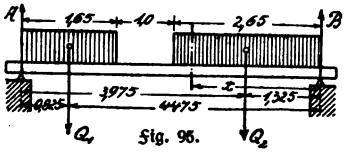


Fig. 95.

3. Auflagerdrucke. Das Belastungsschema zeigt Fig. 95. Für den Drehpunkt B erhält man:

$$A \cdot 530 - Q_1 \cdot 447{,}5 - Q_2 \cdot 132{,}5 = 0$$

$$A = \frac{1375 \cdot 447{,}5 + 2130 \cdot 132{,}5}{530} = 1693 \text{ kg}.$$

Für den Drehpunkt A erhält man:

$$B \cdot 530 - Q_2 \cdot 397{,}5 - Q_1 \cdot 82{,}5 = 0$$

$$B = \frac{2130 \cdot 397{,}5 + 1375 \cdot 82{,}5}{530} = 1812 \text{ kg}.$$

Probe: $A + B = \Sigma P$

$$1693 + 1812 = 1375 + 2130$$

$$3505 = 3505.$$

4. Gefährlicher Querschnitt. Da $A > Q_1$, so muß der gefährliche Querschnitt unter der rechtsseitigen Streckenlast liegen. Man rechnet daher von B aus. Ist x die Entfernung des gefährlichen Querschnittes von B (Fig. 95), so muß die auf dieser Strecke ruhende Last $q_2 \cdot x = B$ sein, wenn die Querkraft $V = B - q_2 \cdot x = 0$ sein soll. Mithin ist:

$$x = \frac{B}{q_2} = \frac{1812}{8{,}0} = 227 \text{ cm}.$$

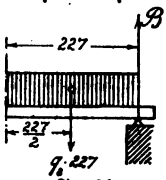


Fig. 96.

Der gefährliche Querschnitt liegt also im Abstand $x = 227$ cm vom rechten Auflager.

5. Größtes Biegungsmoment. Nach Fig. 96 wird:

$$M_{max} = B \cdot 227 - q_2 \cdot 227 \cdot \frac{227}{2}$$

oder da $q_2 \cdot 227 = B$:

$$M_{max} = B \cdot 227 - B \cdot \frac{227}{2} = B \cdot \frac{227}{2} = \frac{2130 \cdot 227}{2}$$

$$M_{max} = 241\,755 \text{ kgcm}.$$

6. Widerstandsmoment. Da bei Kiefernholz $k_b = 100$ kg/cm², so wird:

$$W_x = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{241\,755}{100} = 2418 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wird nach Tabelle ein Normalbalken 24/26 cm mit $W_x = 2704$ cm³.

e) Träger auf zwei Stützen mit gemischter Belastung.

Beispiel. Das Profil des auf S. 57 untersuchten Trägers ist zu bestimmen.

Lösung. Gefunden war $M_{max} = 1\,624\,000$ kgcm, mithin wird:

$$W_x = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{1\,624\,000}{1200} = 1354 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wird ein I-Träger N. P. Nr. 40 mit $W_x = 1459$ cm³.

f) Kappenträger. Die Berechnung der Kappenträger erfolgt, wie die der gleichmäßig belasteten Träger, da die Gewölbekappen ihr Eigengewicht und ihre Nutzlast gleichmäßig auf die ganze Länge des Trägers übertragen. Doch hat man zu beachten, daß sie auch einen Horizontalschub ausüben. Da aber an jedem Träger zwei Kappen zusammenstoßen, so hebt sich dieser Horizontalschub bei gleicher Kappenbreite und gleicher Belastung gegenseitig auf, so daß nur die senkrechte Belastung des Trägers in Frage kommt.

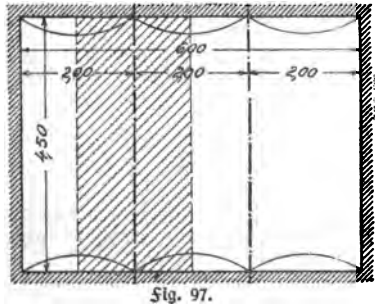


Fig. 97.

Sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt, so muß der Schub durch Verankerung aufgenommen werden.

Beispiel. Ein Kellerraum, dessen Grundriß in Fig. 97 gegeben ist, soll durch ½ Stein starke Gewölbekappen zwischen I-Trägern überdeckt werden. Die Abmessungen der Träger sind zu bestimmen.

Lösung. Lastermittelung. Nach Tabelle ist:

das Eigengewicht für preußische Kappen von ⅛ Pfeil und
2,0 bis 2,5 m Spannweite, aus Ziegelsteinen . . . . . = 370 kg/qm
die Nutzlast ist anzunehmen zu . . . . . 500 „
mithin Gesamtlast = 870 kg/qm

Stützweite. Diese wird $l = 1{,}04\,l_1 + 0{,}10 = 1{,}04 \cdot 4{,}5 + 0{,}10 = \sim 4{,}80$ m. Demnach ist die auf einen Träger entfallende Last (Belastungsfeld in Fig. 97 schraffiert): $Q = 4{,}80 \cdot 2{,}0 \cdot 870 = \sim 8360$ kg.

Mit Rücksicht auf das Eigengewicht soll gerechnet werden mit:

$$Q = 8600 \text{ kg}.$$

Demnach:
$$M_{max} = \frac{Q \cdot l}{8} = \frac{8600 \cdot 480}{8} = 516000 \text{ kg/cm}$$

$$W_x = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{516000}{1200} = 430 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wird ein I-Träger N. Pr. Nr. 26 mit $W_x = 441$ cm³ und $G = 41{,}9$ kg/m. Das Gewicht des Trägers ist mithin $41{,}9 \cdot 4{,}8 = 201{,}1$ kg, so daß die Gesamtlast wird:

$$Q_1 = 8360 + 201 = 8561 \text{ kg} < 8600 \text{ kg}.$$

Das gewählte Profil genügt also auch für Eigengewicht.

Die Auflagerdrücke werden $A = B = \frac{Q}{2} = \frac{8600}{2} = 4300$ kg. Bei einer Unterlage aus Hartbrandziegeln in Zementmörtel mit $k_d = 12$ kg/qcm wird die erforderliche Auflagerfläche:

$$F = \frac{P}{k_d} = \frac{4300}{12} = 360 \text{ qcm}.$$

Die Flanschbreite des Trägers ist $b = 11{,}3$ cm. Somit wird die erforderliche Auflagerlänge:

$$x = \frac{F}{b} = \frac{360}{11{,}3} = 32 \text{ cm}.$$

Die angenommene Stützweite von 4,80 m kann daher als entsprechend angesehen werden.

g) Der Frei- oder Kragträger. Ein Träger, welcher an einem Ende frei schwebt, während nur das andere Ende unterstützt ist, heißt Frei- oder Kragträger. Die Belastung übt auf ihn dieselbe Wirkung aus, welche der Wind auf einen Baum hervorbringt. Ein Ast bricht unter dem Winde an der Stelle durch, an welcher er am Baume festgewachsen ist; der ganze Baum wird dicht an der Erdoberfläche umbrechen. Der gefährliche Querschnitt liegt also offenbar an der Einspannstelle. Dasselbe ist beim Freiträger der Fall. Nach Fig. 98 wird für einen im Punkte B geführten Schnitt bei Betrachtung des rechten Balkenstückes das Moment:

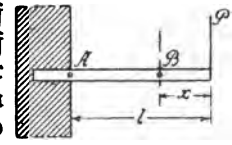


Fig. 98.

$$M_x = P \cdot x.$$

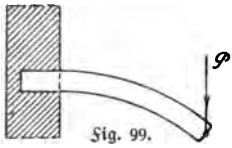


Fig. 99.

M_x wächst offenbar, je größer x wird; seinen Höchstwert erreicht es für $x = l$, nämlich:

$$M_{max} = P \cdot l.$$

Das größte Biegungsmoment tritt also an der Einspannstelle des Trägers im Mauerwerk auf und heißt daher auch Einspannungsmoment.

Da der Träger durch die lotrechten Lasten nach unten gebogen wird, so erleidet die obere Faser Zug, die untere Druck (Fig. 99).

Im übrigen erfolgt die Berechnung wie bei den anderen Trägerarten. Man hat den Drehpunkt zur Ermittelung von M_{max} stets an der Einspannstelle anzunehmen und für ihn die Summe aller Momente der angreifenden Kräfte aufzustellen. Diese ist das gesuchte größte Biegungsmoment.

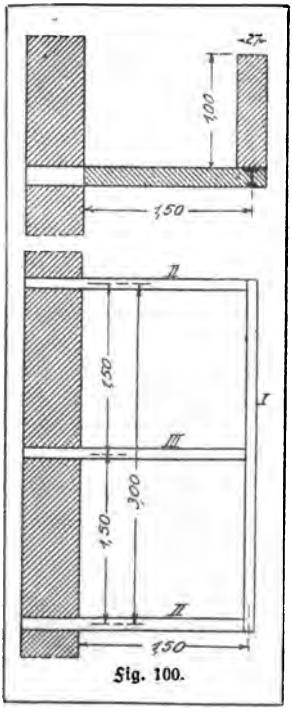


Fig. 100.

Freiträger kommen namentlich bei Erkern, Balkonen, Laufgängen u. dgl. vor.

Beispiel. Ein Balkon von 3,0 m Länge und 1,50 m Ausladung wird durch drei Freiträger unterstützt, welche an der Vorderseite durch einen Längsträger verbunden sind. Letzterer trägt die 1,0 m hohe und 1 Stein starke Brüstungsmauer aus Ziegelsteinen. Die Decke ist eine Massivdecke; die Belastung einschl. Eigengewicht beträgt 750 kg/qm (Fig. 100).

Lösung. a) Berechnung des Vorderträgers I. Die Belastung erfolgt nur durch die Brüstung, ist also eine gleichmäßige. Die Stützweite ist 1,50 m, 1 cbm Ziegelmauerwerk wiegt 1800 kg. Mithin beträgt das Gewicht der Brüstung:

$$Q_1 = 1{,}50 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}27 \cdot 1800 = 730 \text{ kg}$$

$$M_{max} = \frac{Q_1 \cdot l}{8} = \frac{730 \cdot 150}{8} = 13700 \text{ kg}$$

$$W_x = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{13700}{1200} = 11{,}4 \text{ cm}^3.$$

Genügen würde ein [-Träger N. Pr. Nr. $6\frac{1}{2}$ mit $W_x = 17{,}7$ cm³. Doch soll

aus baulichen Gründen gewählt werden [-Träger N. Pr. Nr. 10 mit $W_x = 41{,}1$ cm³ und $G = 10{,}6$ kg/m.

b) Berechnung des Seitenträgers II. Da der eigentliche Einspannungspunkt etwa 15 cm im Innern des Mauerwerks liegt, soll die freie Länge des Trägers zu 1,50 m angenommen werden.

Laſtermittelung.

1. Einzellaſt am freien Ende, hervorgerufen durch den Auflagerdruck des Vorderträgers I $P = \frac{Q_1}{2} = \frac{730}{2} = 365$ kg.

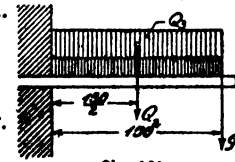


Fig. 101.

2. Gleichmäßig verteilte Belaſtung, hervorgerufen durch die Balkonbrüſtung $Q_2 = 1{,}50 \cdot 0{,}27 \cdot 1{,}0 \cdot 1800 = 730$ kg.

3. Gleichmäßig verteilte Belaſtung, hervorgerufen durch die Deckenlaſt des anſtoßenden halben Feldes Q_3 $= \frac{1{,}50 \cdot 1{,}50}{2} \cdot 750 \ldots\ldots = \sim 850$ kg.

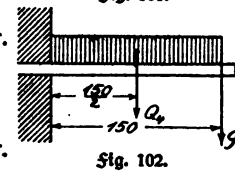


Fig. 102.

Das Belaſtungsſchema zeigt Fig. 101. Das größte Biegungsmoment tritt an der Einſpannſtelle auf und beträgt:

$$M_{max} = P \cdot 150 + Q_2 \cdot \frac{150}{2} + Q_3 \cdot \frac{150}{2} = P \cdot 150 + (Q_2 + Q_3) \cdot 75$$

$$M_{max} = 365 \cdot 150 + (730 + 850) \cdot 75 = 173250 \text{ kgcm}$$

$$W_x = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{173250}{1200} = 144{,}5 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wird I-Träger N. Pr. Nr. 18 mit $W_x = 161$ cm³ und $G = 21{,}8$ kg/m.

c) Mittelträger III. Laſtermittelung.

1. Einzellaſt am Ende durch den Auflagerdruck des Vorderträgers, und zwar von beiden Seiten $P = 2 \cdot \frac{Q_1}{2} = 2 \cdot 365 = 730$ kg.

2. Gleichmäßig verteilte Belaſtung durch Decke und Nutzlaſt $Q_4 = 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 750 \ldots\ldots\ldots\ldots = \sim 1690$ kg.

Das größte Moment an der Einſpannſtelle iſt (Fig. 102):

$$M_{max} = P \cdot 150 + Q_4 \cdot \frac{150}{2} = 150 \left(P + \frac{Q_4}{2}\right)$$

$$M_{max} = 150 \left(730 + \frac{1690}{2}\right) = 236250 \text{ kgcm}$$

$$W_x = \frac{236250}{1200} = 197 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wird ein I-Träger N. Pr. Nr. 20 mit $W_x = 214$ cm³ und $G = 26{,}3$ kg/m.

h) Träger mit überragenden Enden. Die Träger mit überragenden Enden kann man sich zusammengesetzt denken aus einem Träger auf zwei Stützen und einem Freiträger, bzw. zwei Freiträgern. Dementsprechend treten zwei, bzw. drei Höchstmomente auf, nämlich eines zwischen den Stützen und eines über der, bzw. den Stützen. Man hat daher genau auf den Drehsinn der Auflagerwiderstände und der äußeren Kräfte bei der Ermittelung der Auflagerdrücke und der Biegungsmomente zu achten. Das absolut größte Biegungsmoment ist der Berechnung zugrunde zu legen.

Sind bei einem Träger mit zwei überragenden Enden diese gleich lang und gleich belastet, so müssen die beiden Stützenmomente einander gleich werden.

Beispiel. Zur Unterstützung eines Balkons von 1,80 m Ausladung sollen die über die Gebäudemauern hinausragenden Fußbodenbalken aus Kiefernholz dienen, welche 0,80 m auseinanderliegen und 5,50 m Stützweite haben. Die Belastung des Fußbodens beträgt 450 kg/qm, die Balkonbelastung 650 kg/qm, das Gewicht der Brüstung 120 kg/m. Die mittleren Balken des Balkons sind zu berechnen.

Lösung. Lastermittelung. Die gleichmäßige Belastung eines Balkens zwischen den Stützen beträgt für 1 cm Länge:

$q_1 = 0{,}8 \cdot 4{,}50 = 3{,}6$ kg, demnach: $Q_1 = 3{,}6 \cdot 550 = 1980$ kg

und am überragenden Ende:

$q_2 = 0{,}8 \cdot 650 = 5{,}2$ kg,

mithin:

$Q_2 = 5{,}2 \cdot 180 = 936$ kg.

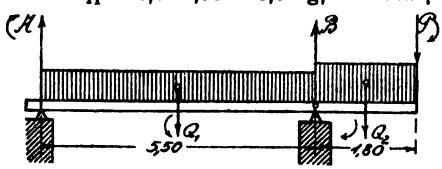


Fig. 103.

Die durch das Brüstungsgewicht am Ende hervorgerufene Einzellast beträgt:

$P = 0{,}8 \cdot 120 = 96$ kg.

Demnach ergibt sich nebenstehendes Belastungsschema (Fig. 103).

Auflagerwiderstände. Für den Drehpunkt B erkennt man, daß A, P und Q_2 rechtsdrehende Momente, Q_1 ein linksdrehendes Moment hervorrufen. Demnach wird:

$$A \cdot 550 + P \cdot 180 + Q_2 \cdot \frac{180}{2} - Q_1 \cdot \frac{550}{2} = 0$$

$$A = \frac{1980 \cdot \frac{550}{2} - 96 \cdot 180 - 936 \cdot \frac{180}{2}}{550} = 806 \text{ kg}.$$

Für den Drehpunkt A erhält man, da jetzt Q_1, Q_2 und B im gleichen Sinne und entgegengesetzt wie B drehen:

$$B \cdot 550 - Q_1 \cdot \frac{550}{2} - Q_2 \cdot \left(550 + \frac{180}{2}\right) - P \cdot (550 + 180) = 0$$

$$B = \frac{1980 \cdot 275 + 936 \cdot 640 + 96 \cdot 730}{550} = 2206 \text{ kg}.$$

Probe:
$$A + B = Q_1 + Q_2 + P$$
$$806 + 2206 = 1980 + 936 + 96$$
$$3012 = 3012.$$

Gefährlicher Querschnitt. Die Stelle des gefährlichen Querschnittes zwischen den Stützen ergibt sich aus:

$$A - q_1 \cdot x = 0, \quad \text{also:} \quad x = \frac{A}{q_1} = \frac{806}{3{,}6} = 224 \text{ cm}.$$

Ein zweiter gefährlicher Querschnitt liegt über der Stütze B.

Biegungsmomente: Das Moment zwischen den Stützen (linkes Trägerstück betrachtet) ist (Fig. 104):

$$M_x = A \cdot 224 - q_1 \cdot x \cdot \frac{224}{2}$$
$$= A \cdot 224 - A \cdot \frac{224}{2} = A \cdot \frac{224}{2}$$
$$M_x = 90272 \text{ kg/cm}.$$

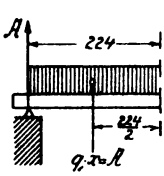


Fig. 104.

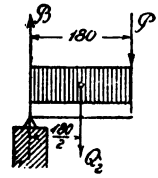


Fig. 105.

Das Moment über die Stütze B (rechtes Trägerstück betrachtet) wird (Fig. 105):

$$M_B = P \cdot 180 + Q_2 \cdot \frac{180}{2} = 180 \left(P + \frac{Q_2}{2}\right)$$

$$M_B = 180 \cdot \left(96 + \frac{936}{2}\right) = 101520 \text{ kgcm}.$$

Widerstandsmoment. Da $M_B > M_x$, so ist M_B der Berechnung zugrunde zu legen. Es wird:

$$W_x = \frac{M_B}{k_b} = \frac{101520}{100} = 1015{,}2 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wird ein Balken 16/20 cm mit $W_x = 1067$ cm³.

Berechnung der nicht überragenden Balken. Die Belastung ist $Q = 1980$ kg, die Stützweite $l = 5.5$ m. Mithin wird:

$$M_{max} = \frac{Q_1 \cdot l}{8} = \frac{1980 \cdot 550}{8} = 136125 \text{ kgcm}$$

$$W_x = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{136125}{100} = 1361 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wird ein Querschnitt 18/23 cm mit $W_x = 1452$ cm³.

Die einfachen Deckenbalken ergeben also einen größeren Querschnitt, als die überragenden Balken, was in der Regel der Fall ist. Aus praktischen Gründen wird man den überragenden Balken dieselbe Stärke geben, wie den einfachen Deckenbalken.

i) Berechnung von Auflagerplatten. Die Berechnung der erforderlichen Druckfläche ist bereits besprochen (S. 70); mithin bleibt noch die Ermittelung der Stärke zu behandeln. Die Platten sind auf Biegungsfestigkeit zu untersuchen, und zwar sowohl in der Richtung der Trägerachse, wie in der Richtung senkrecht zur Trägerachse.

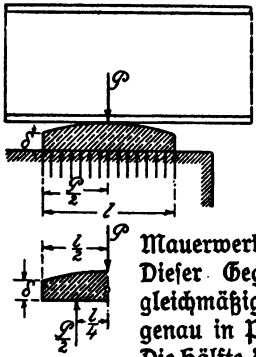


Fig. 106.

1. Berechnung in der Richtung der Trägerachse. Die Platte wird durch den Auflagerdruck P beansprucht, welcher im Mauerwerk einen gleich großen Gegendruck hervorruft. Dieser Gegendruck (Auflagerwiderstand) verteilt sich gleichmäßig über die untere Fläche der Platte. Damit P genau in Plattenmitte angreift, wölbt man die Platte. Die Hälfte der Platte kann als ein in der Mitte der Platte eingespannter Träger betrachtet werden (Fig. 106). Das größte Biegungsmoment tritt daher in der Plattenmitte auf und wird:

$$M_{max} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{P \cdot l}{8} \text{ und da: } W = \frac{M_{max}}{k_b}, \text{ so folgt:}$$

$$W = \frac{P \cdot l}{8 k_b}.$$

Bezeichnet ferner l die Länge der Platte und δ ihre Stärke, so ist:

$$W = \frac{l \delta^2}{6}.$$

Die beiden Ausdrücke für W sind einander gleich zu setzen und hieraus die Stärke δ der Platte zu bestimmen.

2. Berechnung in der Richtung senkrecht zur Trägerachse. Der Auflagerdruck P verteilt sich auf die Breite des Flansches b_1 und ruft einen gleich großen Gegendruck hervor, welcher sich gleichmäßig auf die untere Breite b der Platte verteilt. Das hierdurch in der Mitte der Platte hervorgerufene Biegungsmoment hat die Größe (Fig. 107):

$$M_{max} = \frac{P}{2} \cdot \frac{b}{4} - \frac{P}{2} \cdot \frac{b_1}{4} \quad M_{max} = \frac{P}{8}(b - b_1).$$

Dieſes Moment iſt in der Regel kleiner als das unter 1. aufgeſtellte. Das abſolut größte der beiden Momente iſt der Berechnung zugrunde zu legen. Hat man nach dem zweiten Moment zu rechnen, ſo iſt wieder:

$$W = \frac{M_{max}}{k_b} \quad \text{und} \quad W = \frac{b\delta^2}{6}.$$

Aus der Gleichſetzung beider Ausdrücke für W findet man δ.

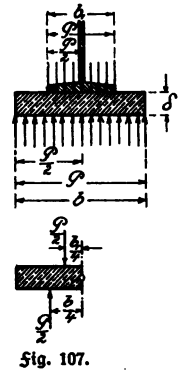


Fig. 107.

Beiſpiel. Ein I-Träger N. P. Nr. 34 übt auf das Auflager einen Auflagerdruck $P = 7200$ kg aus. Die Abmeſſungen der gußeiſernen Unterlagsplatte ſind zu ermitteln.

Löſung. a) Beſtimmung der Auflagerfläche. Es wird:

$$F = \frac{P}{k_d}.$$

Für Hartbrandziegel in Zementmörtel iſt $k_d = 12$ kg/cm², mithin:

$$F = \frac{7200}{12} = 600 \text{ cm}^2.$$

Die Flanſchbreite iſt $b_1 = 13{,}7$ cm. Die Plattenbreite kann man beſtimmen aus der Beziehung: $b = b_1 + (5 \text{ bis } 10 \text{ cm})$,

womit den früheren Angaben (S. 71) entſprochen wird. Hier wird alſo:

$$b = 13{,}7 + 10 = \sim 24 \text{ cm}$$

und demnach die Länge: $l = \frac{F}{b} = \frac{600}{24} = 23$ cm.

b) Berechnung der Stärke in der Richtung der Trägerachſe. Es iſt:

$$M_{max} = \frac{P \cdot l}{8} = \frac{7200 \cdot 25}{8} = 22500 \text{ kgcm} \quad \text{und} \quad W = \frac{l\delta^2}{6} = \frac{M_{max}}{k_b};$$

für Gußeiſen iſt $k_b = 250$ kg/cm², mithin wird:

$$\frac{25 \cdot \delta^2}{6} = \frac{22500}{250}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{6 \cdot 22500}{25 \cdot 250}} = \sim 5 \text{ cm}.$$

c) Berechnung der Stärke in der Richtung senkrecht zur Trägerachse. Das größte Biegungsmoment wird:

$$M_{max} = \frac{P}{8}(b - b_1) = \frac{7200}{8}(24 - 13{,}7) = 9270 \text{ kg/cm}.$$

Da dieses Moment bedeutend kleiner ist, als das unter 2. berechnete, so ist die dort gefundene Plattenstärke für die Ausführung zu wählen.

E. Torsionsfestigkeit.

Sucht ein am freien Ende eines mit dem anderen Ende fest eingespannten Stabes wirkendes Kräftepaar mit dem Drehmoment M den Stab um seine Längsachse zu verdrehen, so wird der Stab auf Torsionsfestigkeit beansprucht (Fig. 108).

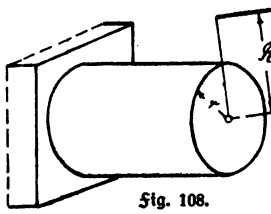


Fig. 108.

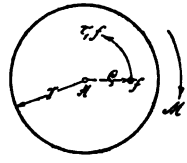


Fig. 109.

Man kann dabei den Stab aus einer großen Anzahl sehr dünner Scheiben zusammengesetzt denken. Das Kräftepaar sucht nun jede dieser Scheiben gegen die benachbarte Scheibe um ihren Mittelpunkt (kreisrunden Querschnitt vorausgesetzt) zu verschieben. Im Innern des Stabes treten mithin Schubspannungen auf, welche dem äußeren Kräftepaar das Gleichgewicht halten müssen und die einzelnen Scheiben in ihre ursprüngliche Lage zurückzudrehen suchen.

Der Querschnitt des Stabes sei in Fig. 109 gegeben. Er habe den Halbmesser r. Betrachtet man nun ein Flächenteilchen f des Querschnittes im Abstande ρ vom Mittelpunkte A, und ist τ_1 die Schubspannung für 1 qcm an dieser Stelle, so leistet das Flächenteilchen gegen die Verdrehung einen Widerstand $= \tau_1 \cdot f$. Dessen Moment in bezug auf A ist $= \tau_1 \cdot f \cdot \rho$. Mithin ist das Moment des ganzen Querschnittes:

$$M = \sum(\tau_1 \cdot f \cdot \rho.)$$

Ist nun weiter τ die größte, am Umfange vorhandene Schubspannung, so erhält man, da die Spannungen sich verhalten wie ihre Abstände vom Mittelpunkte A: $\frac{\tau_1}{\tau} = \frac{\rho}{r}$ woraus: $\tau_1 = \tau \cdot \frac{\rho}{r}$.

Mithin wird: $M = \sum\left(\frac{\rho}{r} \cdot \tau \cdot f \cdot \rho\right) = \frac{\tau}{r} \cdot \sum(f\rho^2)$. (20)

Der Ausdruck $\Sigma(f\rho^2)$ ist nichts anderes als das Trägheitsmoment J_C des ganzen Querschnittes bezogen, auf den Mittelpunkt (zentrales Trägheitsmoment). Also ist:

$$M = \tau \cdot \frac{J_C}{r}. \qquad (21)$$

Für kreisrunden Querschnitt ist: $J_C = \frac{d^4\pi}{32}$.

Mit diesem Werte und für $r = \frac{d}{2}$ erhält man:

$$M = \frac{d^3\pi}{16} \cdot \tau. \qquad (22)$$

Das äußere Kraftmoment ist nach Fig. 108 $M = P \cdot R$, mithin kann man setzen: $P \cdot R = \frac{d^3\pi}{16} \cdot \tau$.

Diese Gleichung kann man benutzen, um den Durchmesser einer Welle zu berechnen. Es wird hieraus:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16PR}{\pi \cdot \tau}}. \qquad (23)$$

Beispiel. Der Durchmesser einer flußeisernen Welle ist zu berechnen. Auf die Welle wirke eine Kraft $P = 3000$ kg mit einem Hebelarme $R = 0{,}60$ m. Die zulässige Beanspruchung betrage $\tau = 500$ kg/qcm.

Lösung. Der Durchmesser wird erhalten aus:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3000 \cdot 60}{3{,}14 \cdot 500}} = \sim 12{,}5 \text{ cm}.$$

F. Knickfestigkeit.

1. Allgemeines und Rechnungsgang.

Ist bei einem auf Druck beanspruchten Stabe die Stablänge im Vergleich zum Querschnitt groß, so wird von einer gewissen Grenze an der Stab seitlich ausbiegen und durch Knicken zerstört werden.

Säulen und Stützen sind daher stets auf Knickfestigkeit wie auf Druckfestigkeit zu berechnen.

Die zur Berechnung dienende Formel ist mit der elementaren Mathematik nicht herzuleiten. Auch soll nur der weitaus am häufigsten im Bauwesen vorkommende Fall behandelt werden, wobei der Stab an beiden Enden nach allen Seiten frei dehnbar und in der Richtung der Stabachse geführt ist (Fig. 110).

Zur Berechnung dient die Eulersche Formel, welche für diesen Fall lautet:

$$P = \frac{10 E J_{min}}{s l^2}. \qquad (24)$$

Hierin bedeutet E das Elastizitätsmaß des Baustoffes in kg/qcm, J_{min} das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf die Schwerachse, l die Länge des Stabes in cm, s den vom Baustoff abhängigen Sicherheitsgrad (bei Flußeisen $s = 5$, bei Gußeisen $s = 8$, bei Holz $s = 10$).

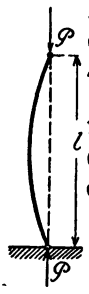


Fig. 110.

Meistens ist die Belastung des Stabes P gegeben, so daß man nach Ermittelung von J_{min} mit Hilfe vorstehender Formel den Querschnitt in Tabellen aufschlagen kann. Durch Umformung erhält man für diesen Fall:

$$J_{min} = \frac{s \cdot P \cdot l^2}{10 E}. \qquad (25)$$

Als Knicklänge kommt die Geschoßhöhe in Frage.

Flußeiserne Stützen werden häufig aus mehreren ⊏ oder L-Eisen zusammengesetzt. Man hat dann mit Hilfe der Gleichung 23 diejenige Länge l zu ermitteln, bei welcher eines der zum Querschnitt zu verwendenden Eisen den auf dasselbe entfallenden Teil der Belastung noch zu tragen vermag, ohne seitlich auszuknicken. In dem so berechneten Abstande sind die Eisen durch Querverbindungen (Laschen) miteinander zu verbinden, wobei die Stütze stets in eine ungerade Zahl von Abschnitten geteilt werden soll.

II. Anwendungen.

Beispiel 1. Die Tragfähigkeit eines Kiefernholzpfostens von 2,80 m Länge und $^{14}/_{16}$ cm Querschnitt ist zu berechnen.

Lösung. Gegeben $b = 14$ cm, $h = 16$ cm; $s = 10$; $E = 100000$ kg/qcm; $l = 280$; $F = 14 \cdot 16 = 224$ qcm.

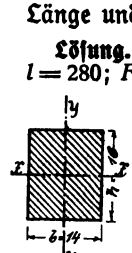


Fig. 111.

a) Berechnung auf Druck. Für $k_d = 80$ kg/qcm wird:

$$P = F \cdot k_d = 224 \cdot 80$$

$$P = 17920 \text{ kg}.$$

b) Berechnung auf Knicken. Das kleinste Trägheitsmoment ergibt sich in bezug auf die $y - y$ Achse (Fig. 111). Mithin ist:

$$J_{min} = \frac{h b^3}{12} = \frac{16 \cdot 14^3}{12} = 3659 \text{ cm}^4.$$

Folglich wird die Tragfähigkeit: $P = \frac{10 E J_{min}}{s l^2} = \frac{10 \cdot 100000 \cdot 3659}{10 \cdot 280 \cdot 280}$

$P = 5560$ kg.

Da die Tragfähigkeit auf Knicken kleiner ist als die für Druck, so darf der Pfosten nur mit $P = 5560$ kg belastet werden.

Beispiel 2. Eine gußeiserne Säule wird in der Achse mit $P = 25000$ kg belastet. Ihre Länge beträgt 5,0 m. Der Querschnitt und die Fußplatte sind zu berechnen.

Lösung. a) Ermittelung des Querschnittes: Erforderlich ist:

$$J_{min} = \frac{s P l^2}{10 E} = \frac{8 \cdot 25000 \cdot 500^2}{10 \cdot 1000000}$$

$$J_{min} = 5000 \text{ cm}^4.$$

Gewählt wird ein Querschnitt mit $D = 20{,}0$ cm, $\delta = 2{,}4$ cm, $F = 133$ qcm und $I = 5344$ cm^4 (Fig. 112).

Die Tragfähigkeit der Säule auf Druck wird daher:

$$P = F \cdot k_d = 133 \cdot 500 = 66500 \text{ kg}.$$

Die Säule besitzt also auch für Druck die erforderliche Tragfähigkeit, da die Belastung nur 25000 kg beträgt.

b) Berechnung des Säulenfußes. Als Unterlage werde Sandstein mit $k_d = 25$ kg/qcm angenommen. Dann wird die erforderliche Druckfläche:

$$F = \frac{P}{k_d} = \frac{25000}{25} = 1000 \text{ qcm}.$$

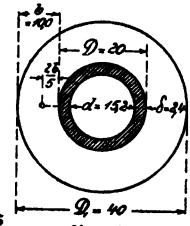


Fig. 112.

Nach Fig. 112 ist: $F = (D^2 - d^2) \cdot \frac{\pi}{4}$

woraus:

$$D = \sqrt{\frac{4F}{\pi} + d^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1000}{\pi} + 15{,}2^2} = \sim 40 \text{ cm}.$$

Bei einem quadratischen Querschnitt und Fuß ist als Stützenquerschnitt zu wählen: Seitenlänge $a = 18$ cm, Wandstärke $\delta = 2$ cm, Querschnittsfläche $F = 128$ qcm, $J_{min} = 5547$ cm^4. Die Tragfähigkeit der Stütze für Druck ist daher:

$$P = F \cdot k_d = 128 \cdot 500 = 64000 \text{ kg} > 25000 \text{ kg}.$$

Die Seitenlänge a_1 der Fußplatte erhält man aus:

$$F = a_1^2 - 14^2 = 1000$$

$$a_1 = \sqrt{1000 + 14^2} = 35 \text{ cm}.$$

Beispiel 3. Eine aus 2 ⊏-Eisen bestehende flußeiserne Stütze soll eine in der Achse wirkende Kraft $P = 30000$ kg aufnehmen. Ihre

Höhe beträgt 4,0 m. Die Unterlage darf mit $k_d = 20$ kg/qcm beansprucht werden. Querschnitt und Fußplatte sind zu berechnen.

Lösung. a) Ermittelung des Querschnittes. Das erforderliche Trägheitsmoment in bezug auf die Hauptachse $I—I$ ist:

$$J_{\min} = \frac{s P l^2}{10 E} = \frac{5 \cdot 30000 \cdot 500^2}{10 \cdot 2150000} = 1120 \text{ cm}^4.$$

Für ein Eisen ist daher erforderlich:

$$\frac{J_{\min}}{2} = \frac{1120}{2} = 560 \text{ cm}^4 = J_x.$$

Gewählt werden 2 [-Eisen N.P. Nr. 14 mit je $J_x = 605 \text{cm}^4$, $J_y = 62{,}7 \text{ cm}^4$, $F = 20{,}4$ qcm. Das Gesamtträgheitsmoment ist daher:

$$J_I = 2 \cdot J_x = 2 \cdot 605 = 1210 \text{ cm}^4.$$

Die Tragfähigkeit dieses Querschnittes ist für Druck:

$$P = F \cdot k_d = 20{,}4 \cdot 1200 \cdot 2 = 48960 \text{ kg} > 30000 \text{ kg}.$$

b) Ermittelung des Abstandes der beiden Profile. Die beiden Profile sind so weit auseinanderzurücken, daß $J_{II} = J_I$ wird. Es wird daher in bezug auf die Achse $II—II$ (Fig. 113):

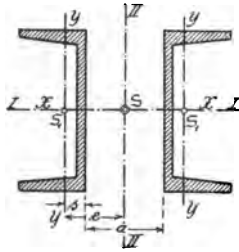


Fig. 113.

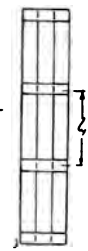


Fig. 114.

$$J_{II} = 2 \cdot (J_y + F \cdot e^2)$$

$$1210 = 2 \cdot (62{,}7 + 20{,}4 \cdot e^2)$$

$$20{,}4 e^2 = \frac{1210}{2} - 62{,}7$$

$$e = \sqrt{\frac{542{,}3}{20{,}4}} = \sim 5{,}2 \text{ cm}.$$

Der Abstand der beiden Profile beträgt demnach, da nach Tabelle $s = 1{,}75$ cm

$$a = 2(e - s) = 2 \cdot (5{,}2 - 1{,}75) = 6{,}90 \text{ cm}.$$

c) Bestimmung des Abstandes der Querverbindungen. Auf ein Eisen entfällt eine Last $\frac{P}{2} = \frac{30000}{2} = 15000$ kg. Die Länge, auf welche das Eisen für sich allein bei Aufnahme dieser Last knicksicher ist, erhält man aus (Fig. 114):

$$\frac{P}{2} = \frac{10 E \cdot J_{\min}}{s l_1^2}$$

$$l_1 = \sqrt{\frac{10 E J}{\frac{P}{2} \cdot s}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 2150000 \cdot 62{,}7}{15000 \cdot 5}} = 134 \text{ cm}.$$

Bei einer Länge von 4,0 m sind daher 3 Teilungen, also 4 Querverbindungen erforderlich.

d) Berechnung der Fußplatte. Die erforderliche Fläche wird:

$$F = \frac{P}{k_d} = \frac{30000}{20} = 1500 \text{ qcm.}$$

Die Seitenlängen der Fußplatte werden daher gewählt:

46×34 cm, so daß: $F = 46 \cdot 34 = 1564$ qcm.

G. Zusammengesetzte Festigkeit.

I. Doppelbiegung.

Wirken die äußeren Kräfte auf einen Balken nicht in einer durch eine Hauptachse gehenden Ebene, sondern unter einem Winkel α ein, so muß man jede Kraft in zwei Seitenkräfte zerlegen, von denen die eine in der Richtung der einen Hauptachse, die andere in der Richtung der anderen Hauptachse wirkt (Fig. 115). Es entsteht also eine Doppelbiegung.

So ruft die senkrecht zur X—X-Achse wirkende Seitenkraft P_x ein Moment M_x hervor, welches ein Widerstandsmoment W_x erfordert und die dabei entstehende größte Spannung hat den Wert:

$$k_b' = \frac{M_x}{W_x}.$$

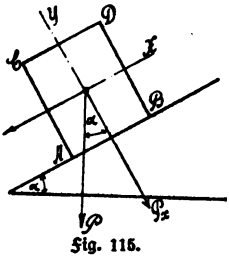


Fig. 115.

P_y ruft ein Moment M_y hervor und erfordert ein Widerstandsmoment W_y. Dabei wird eine Spannung erzeugt:

$$k_b'' = \frac{M_y}{W_y}.$$

Die oberhalb jeder Achse auftretenden Spannungen sind bekanntlich Druckspannungen, die unterhalb auftretenden sind Zugspannungen. Man erkennt aus Fig. 115 sofort, daß in den Kanten C und B gleichzeitig Zug- und Druckspannungen auftreten, welche sich gegenseitig teilweise aufheben, in der Kante D dagegen sich die Druckspannungen und in der Kante A die Zugspannungen summieren. Selbstverständlich darf die Summe dieser Spannungen die zulässige Beanspruchung k_b nicht überschreiten.

Es muß daher sein: $k_b \geqq k_1 + k_2$

$$k_b \geqq \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}. \qquad (26)$$

Da man in dieser Gleichung zwei Unbekannte W_x und W_y hat, kann man die Rechnung nur durch probeweise Annahme eines Querschnittes lösen und muß sie gegebenenfalls wiederholen. Ein Beispiel möge den Rechnungsgang erläutern.

Beispiel. Bei einem eisernen Dache beträgt die wagerechte Entfernung der Pfetten 2,40 m, die Binderentfernung 3,20 m, der Neigungswinkel der Dachfläche $\alpha = 21^0 50'$ (also $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}4 = 1 : 2{,}5$). Die lotrecht wirkende Belastung ist 175 kg/qm Grundrißfläche. Die Pfette ist zu berechnen für Holz und Eisen (⊏).

Lösung. Die Gesamtbelastung ist eine gleichmäßig verteilte:

$$Q = 3{,}2 \cdot 2{,}4 \cdot 175 = 1344 \text{ kg}.$$

Nach Fig. 115 wird dann entsprechend:

$$Q_x = Q \cdot \cos \alpha = 1344 \cdot \cos 21^0 50' = 1344 \cdot 0{,}928 = 1248 \text{ kg}$$

und: $Q_y = Q \cdot \sin \alpha = 1344 \cdot \sin 21^0 50' = 1344 \cdot 0{,}372 = 500 \text{ kg}.$

Demnach:

$$M_x = \frac{Q_x \cdot l}{8} = \frac{1248 \cdot 320}{8} = 49920 \text{ kgcm}$$

$$M_y = \frac{Q_y \cdot l}{8} = \frac{500 \cdot 320}{8} = 20000 \text{ kgcm}.$$

a) Ermittelung des Holzquerschnittes. Wählt man einen Querschnitt 14/16 cm, so findet man in der Tabelle hierfür $W_x = 597$ cm³ und $W_y = 523$ cm³. Demnach wird die auftretende Spannung:

$$k = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{49920}{597} + \frac{20000}{523} = 122 \text{ kg/qcm}.$$

Da Holz nur mit 100 bis 120 kg/qcm auf Biegung beansprucht werden darf, so ist ein größerer Querschnitt zu wählen.

Für einen Querschnitt 14/18 cm findet man $W_x = 756$ cm³ und $W_y = 588$ cm³. Demnach wird:

$$k = \frac{49920}{756} + \frac{20000}{588} = 100 \text{ kg/qcm}.$$

Dieser Querschnitt kann also beibehalten werden.

b) Ermittelung des ⊏-Querschnittes. Nimmt man ein ⊏ N. P. Nr. 18 an, so ist hierfür $W_x = 150$ cm³ und $W_y = 22{,}4$ cm³; mithin wird:

$$k = \frac{49920}{150} + \frac{20000}{22{,}4} = 1226 \text{ kg/qcm}.$$

Zulässig sind nur 1200 kg/qcm. Man hat daher eine größeres Profil zu wählen. Für ein ⊏ N. P. Nr. 20 ist $W_x = 191$ cm³ und $W_y = 27$ cm³, so daß:

$$k = \frac{49920}{191} + \frac{20000}{27} = 1002 \text{ kg/qcm}.$$

Dieses Profil kann beibehalten werden.

II. Druck und Biegung.

Druck und Biegung tritt ein, wenn auf einen Träger Kräfte senkrecht zur Längsachse und in der Längsachse nach innen gleichzeitig wirken (Fig. 116). Am stärksten ist hierbei die äußere Druckfaser A—B beansprucht, weil die biegende Kraft Q die Biegungs-Druckspannung $k_1 = \frac{M}{W}$ und die in der Achse wirkende Kraft P die Druckspannung:

$$k_2 = \frac{P}{F}$$

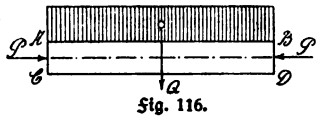


Fig. 116.

in der Faser hervorruft. Diese beiden Spannungen summieren sich (Fig. 117) und dürfen zusammen natürlich höchstens den Wert der zulässigen Beanspruchung k erreichen. Es muß also sein:

$$k_d \geqq k_1 + k_2$$

oder:

$$k_d \geqq \frac{M}{W} + \frac{P}{F}. \qquad (27)$$

(Formel für die gedrückte Faser)

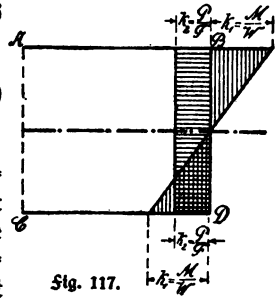


Fig. 117.

In der Faser C—D dagegen heben sich Zug- und Druckspannungen, wie man an dem doppelt schraffierten Teile der Fig. 117 erkennt, teilweise auf. Diese Faser wird mithin schwächer beansprucht und kommt daher für die Rechnung nicht in Frage. Da sowohl W, wie auch F in der Gleichung unbekannt sind, so muß auch hier eine Versuchsrechnung vorgenommen werden.

Beispiel. Ein Sparren mit dem Querschnitt $b:h = 5:7$ liegt auf 4,20 m Länge frei. Die senkrecht zur Achse wirkende Belastung ist $Q = 900$ kg und der in der Achse wirkende Druck $P = 1200$ kg. Der Querschnitt ist zu bestimmen.

Lösung. Da Druck und Biegung vorliegt, so ist nach der Formel:

$$k_d \geqq \frac{M}{W} + \frac{P}{F}$$

zu rechnen. Wählt man $h = 18$ cm, so wird:

$$F = b \cdot h = \frac{5}{7} h^2 = \frac{5}{7} \cdot 18^2 = 232 \text{ qcm}$$

und: $W = \frac{b h^2}{6} = \frac{5}{7} h \cdot \frac{h^2}{6} = \frac{5}{42} h^3 = \frac{5}{42} \cdot 18^3 = 694 \text{ cm}^3$.

Man erhält ferner:

$$M = \frac{Q \cdot l}{8} = \frac{900 \cdot 420}{8} = 47250 \text{ kgcm},$$

mithin wird: $\frac{M}{W} + \frac{P}{F} = \frac{47250}{694} + \frac{1200}{232} = 73{,}2 \text{ kg/qcm}.$

Läßt man für Kiefernholz nur $k_d = 60$ kg/qcm zu, so muß ein größerer Querschnitt gewählt werden.

Für $h = 20$ cm wird:

$$F = \frac{5}{7} \cdot 20^2 = 286 \text{ qcm} \quad \text{und} \quad W = \frac{5}{42} \cdot 20^3 = 952 \text{ qcm},$$

mithin: $\frac{M}{W} + \frac{P}{F} = \frac{47250}{952} + \frac{1200}{286} = 54 \text{ kg/qcm} < k_d.$

Die Höhe $h = 20$ cm genügt also und man erhält:

$$b = \frac{5}{7} h = \frac{5}{7} \cdot 20 = \sim 14 \text{ cm}.$$

Daher wird als Querschnitt 14/20 cm gewählt.

III. Zug und Biegung.

Zug und Biegung tritt ein, wenn ein Träger senkrecht zur Längsachse und in der Längsachse nach außen gleichzeitig beansprucht wird (z. B. bei Binderbalken, Hängewerksbalken, Konsolträgern u. dgl.) (Fig. 118).

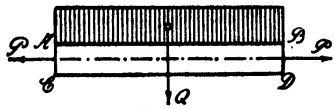


Fig. 118.

In der äußersten gedrückten Faser A—B heben sich die durch die Kraft Q hervorgerufene Biegungs-Druckspannung:

$$k_1 = \frac{M}{W}$$

und die durch die Kraft P hervorgerufene Zugspannung:

$$k_2 = \frac{P}{F}$$

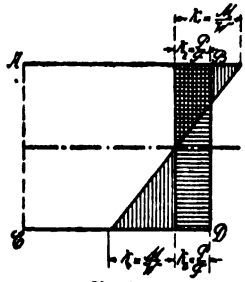


Fig. 119.

zum Teil auf (Fig. 119). Daher darf diese Faser nur soweit auf Druck beansprucht werden, daß die zulässige Beanspruchung:

$$k_d \geqq \frac{M}{W} - \frac{P}{F}$$

oder:
$$M \leqq \left(k_d + \frac{P}{F}\right) \cdot W \qquad (28)$$

(Formel für die gedrückte Faser)

wird. Die äußere Zugfaser C—D erhält die Biegungs-Zugspannung:

$$k_1 = \frac{M}{W}$$

und die durch P hervorgerufene Zugspannung:

$$k_2 = \frac{P}{F}.$$

Beide summieren sich. Die Faser darf daher nur so weit auf Zug beansprucht werden, daß die zulässige Inanspruchnahme:

$$k_z \geqq \frac{M}{W} + \frac{P}{F} \quad \text{oder:} \quad M \leqq \left(k_z - \frac{P}{F}\right) \cdot W \qquad (29)$$

(Formel für die gezogene Faser)

wird.

Betrachtet man einen auf Zug und Biegung beanspruchten Konstruktionsteil aus Kiefernholz mit $k_d = 60$ kg/qcm und $k_z = 100$ kg/qcm, so erkennt man für den Fall, wenn:

$$\frac{P}{F} = 20,$$

daß beide Formeln für M dasselbe Ergebnis liefern, nämlich:

$$M \leqq 80 \cdot W.$$

Wird dagegen $\frac{P}{F} < 20$, so sieht man sofort, daß nach der Formel für die gedrückte Faser nur ein kleineres Moment zulässig ist, als nach der Formel für die gezogene Faser, so daß man in diesem Falle nach der Formel für die gedrückte Faser rechnen muß.

Ist dagegen $\frac{P}{F} > 20$, so ist das kleinere Moment nur zulässig nach der Formel für die gezogene Faser, so daß nach dieser zu rechnen ist.

Bei Eiche liegt der Fall ebenso; der einzige Unterschied beruht darin, daß beide Formeln für $\frac{P}{F} = 10$ dasselbe Ergebnis liefern, da bei Eiche $k_d = 80$ kg/qcm und $k_z = 100$ kg/qcm ist. Um Irrtümer zu vermeiden, wird man daher bei Holzkonstruktionen gut tun, stets nach beiden Formeln zu rechnen [1]).

1) Eine entsprechende Überlegung zeigt, daß bei Druck und Biegung nur die gedrückte Faser für die Rechnung in Betracht kommt, weil hierbei stets das kleinere Moment zulässig ist. Es ist daher auch dort nur hierauf Bezug genommen.

Bei Eisen ist $k_z = k_d = 1200$ kg/qcm. Das kleinere Moment ist daher stets nach der Formel für die gezogene Faser zulässig, so daß nur nach dieser zu rechnen ist.

Beispiel. Ein Binderbalken von 4,60 m freier Länge wird mit $Q = 2100$ kg gleichmäßig belastet und durch eine in seiner Achse wirkende Zugkraft $P = 1000$ kg gleichzeitig beansprucht. Der Querschnitt ist zu bestimmen.

Lösung. Nimmt man einen Querschnitt 16/24 mit $F = 384$ qcm und $W_x = 1536$ cm³ (nach Tabelle) an, so wird, da:

$$M = \frac{Q \cdot l}{8} = \frac{2100 \cdot 460}{8} = 120750 \text{ kgcm},$$

nach der Formel für die gedrückte Faser:

$$\frac{M}{W} - \frac{P}{F} = \frac{120750}{1536} - \frac{1000}{384} = 76 \text{ kg/qcm} > (k_d = 60 \text{ kg/qm}).$$

Der Querschnitt genügt also nicht.

Wählt man einen Querschnitt 18/26 mit $F = 468$ qcm und $W_x = 1928$ cm³, so erhält man:

$$\frac{M}{W} - \frac{P}{F} = \frac{120750}{1928} - \frac{1000}{468} = 60 \text{ kg/qcm} = k_d.$$

Dieser Querschnitt würde also für die gedrückte Faser genügen. Für die gezogene Faser wird dabei:

$$\frac{M}{W} + \frac{P}{F} = \frac{120750}{1928} + \frac{1000}{4{,}68} = 64{,}2 < (k_z = 100 \text{ kg/qcm}).$$

Der Querschnitt 18/26 kann also beibehalten werden.

H. Exzentrischer Druck.

1. Rechnungsgang.

Wirkt eine Kraft P im Schwerpunkte eines Querschnittes senkrecht zu diesem, so kann man, wie wir sahen, annehmen, daß der dabei entstehende Druck sich gleichmäßig über die ganze Querschnittsfläche verteilt. Liegt jedoch der Angriffspunkt der Druckkraft P außerhalb des Schwerpunktes der gedrückten Fläche, so kann keine gleichmäßige Druckverteilung stattfinden. Man sagt dann: der Querschnitt wird auf exzentrischen Druck beansprucht. Exzentrischer Druck kommt bei Stützen, Mauern, Futter-, Stütz- und Kaimauern sehr häufig vor.

Im folgenden soll nur der Fall betrachtet werden, bei welchem die Kraft P wohl außerhalb des Schwerpunktes, aber in einer Schwer-

achse des Querschnittes wirkend angreift (Fig. 120). Man denkt sich im Schwerpunkte S eine der Kraft P gleich große und gleich gerichtete Kraft P_1 angebracht und deren Wirkung durch eine ebenfalls in S angreifende, gleich große, aber entgegengesetzt wirkende Kraft P_2 wieder aufgehoben. Diese drei Kräfte rufen demnach dieselbe Wirkung hervor, wie zuvor die Kraft P.

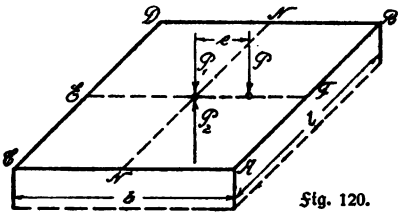


Fig. 120.

Betrachtet man nun die Kraft P_1 für sich, so ruft diese, da sie im Schwerpunkte S angreift und sich mithin gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verteilt, auf jede Flächeneinheit des Querschnittes die Druckspannung hervor:

$$k_d = \frac{P}{F}.$$

Die Kräfte P und P_2 bilden ein Kräftepaar mit dem Drehmoment[1]):

$$M = P \cdot e,$$

welches den Querschnitt um die Achse $N - N$ zu drehen sucht, also Biegungsspannungen erzeugt von der Größe:

$$k_b = \frac{M}{W}.$$

Durch die exzentrische Belastung werden also dieselben Spannungen hervorgerufen, wie bei Zug und Biegung. Die Biegungsspannungen sind bekanntlich Zug- und Druckspannungen. Offenbar erleidet die der Kraft P am nächsten liegende, äußerste und daher am stärksten beanspruchte Faser nur Druckspannungen, deren Größe zusammen die zulässige Beanspruchung nicht überschreiten darf. Daher muß sein:

$$k_{max} \geqq k_1 + k_2 \quad \text{oder:} \quad k_{max} \geqq \frac{P}{F} + \frac{M}{W}.$$

Die entfernter liegende, äußerste Faser $C - D$ erleidet Zug- und Druckspannungen, die sich teilweise aufheben, so daß:

$$k_{min} \geqq k_1 - k_2 \quad \text{oder:} \quad k_{min} \geqq \frac{P}{F} - \frac{M}{W}.$$

1) Es handelt sich hier um den bereits auf S. 34 beschriebenen Fall.

Man hat stets für beide Fälle die Untersuchung zu führen und schreibt daher beide Formeln in der Regel in einer Formel an:

$$k \gtrless \frac{P}{F} \pm \frac{M}{W}. \qquad (30)$$

Sehr häufig ist die Untersuchung für rechteckigen Querschnitt zu führen. In diesem Falle ist nach Fig. 120:

$$W = \frac{l b^2}{6} \quad \text{und:} \quad M = P \cdot e$$

zu setzen. Da nun $l \cdot b^2 = l \cdot b \cdot b = F \cdot b$, so erhält man:

$$k \gtrless \frac{P}{F} \pm \frac{P \cdot e}{\frac{F \cdot b}{6}} \quad \text{woraus:} \quad k \gtrless \frac{P}{F} \cdot \left(1 \pm \frac{6e}{b}\right). \qquad (30\,a)$$

Diese Formel wird hauptsächlich bei der Untersuchung von Mauern jeglicher Art angewendet.

Der Abstand e wird die Exzentrizität genannt.

Grenzfälle. 1. Fall. Wird in obiger Gleichung für k der Abstand $e = 0$, so greift die Kraft P im Schwerpunkt an; es entsteht zentrischer Druck, welcher sich gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verteilt. Das Spannungsbild ist ein Rechteck (Fig. 121).

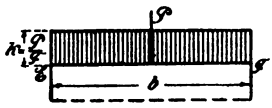


Fig. 121.

Solange k_{min} positiv bleibt, treten offenbar nur Druckspannungen auf. Wird jedoch k_{min} negativ, so entstehen in der Kante E Zugspannungen, weil dann die Biegungs-Zugspannungen größer sein müssen, als die durch die zentrische Belastung hervorgerufenen Druckspannungen; dies tritt also ein, wenn in Gleich. (30):

$$\frac{M}{W} > \frac{P}{F}$$

wird, oder in Gleich. (30a): $\frac{6e}{b} > 1.$

Falls $\frac{6e}{b} = 1$ ist, so wird $k = \frac{P}{F} \cdot (1 - 1) = 0$; die Kante E bleibt also spannungslos, wenn $e = \frac{b}{6}$ wird. Daraus geht hervor:

1. für $e < \frac{b}{6}$ treten im Querschnitt nur Druckspannungen auf;

2. für $e > \frac{b}{6}$ treten im Querschnitt Zug- und Druckspannungen auf;

3. für $e = \frac{b}{6}$ treten im Querschnitt nur Druckspannungen auf, welche bis 0 in der äußersten Faser abnehmen.

Daher kommen für exzentrischen Druck nur noch folgende drei Fälle in Frage.

2. Fall. Abstand $e = \frac{b}{6}$. Es wird:

$$k_{max} = \frac{P}{F} \cdot \left(1 + \frac{6}{b} \cdot \frac{b}{6}\right) = 2 \cdot \frac{P}{F}$$

und wie oben gefunden: $k_{min} = 0$.

Die größte Spannung ist also hier genau doppelt so groß, wie bei zentrischer Druckbeanspruchung. Das Spannungsbild wird ein Dreieck (Fig. 122).

Fig. 122 zeigt auch die zeichnerische Ermittelung. Was hierüber an dieser Stelle gesagt wird, gilt auch für die beiden nächsten Fälle. Man

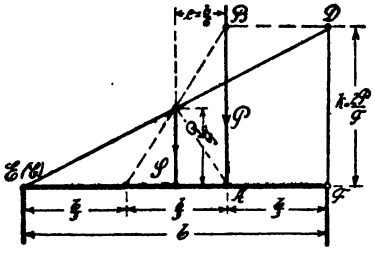


Fig. 122.

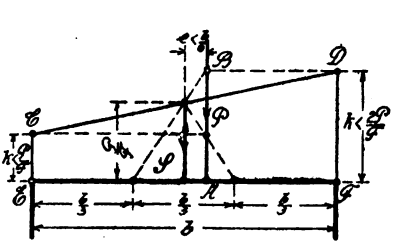


Fig. 123.

trägt im Schwerpunkte S in einem gewählten Kräftemaßstabe die Größe der Spannung für zentrischen Druck, also $= \frac{P}{F}$ auf, verbindet den oberen Endpunkt dieser Spannung mit den Endpunkten des mittleren Drittels (des Kernes) der Fuge EF und bringt die beiden gleichen Seiten des so entstehenden gleichschenkligen Dreiecks durch entsprechende Verlängerung zum Schnitt mit der im Abstande e von S aufgetragenen, exzentrisch wirkenden Kraft P. Die so gewonnenen Schnittpunkte A und B überträgt man wagerecht nach den durch die Kanten E und F gezogenen Lotrechten, dann erhält man durch Messung mit dem gewählten Kräftemaßstab die Strecken $DF = k_{max}$ und $EC = k_{min}$.

Da in Fig. 122 Punkt C mit E zusammenfällt, so folgt auch hieraus, daß $EC = 0$, also $k_{min} = 0$ ist.

3. Fall. Abstand $e < \frac{b}{6}$. Aus Gleich. (30a) erkennt man sofort, daß:

$$k_{max} > \frac{P}{F} \quad \text{und:} \quad k_{max} < \frac{2P}{F},$$

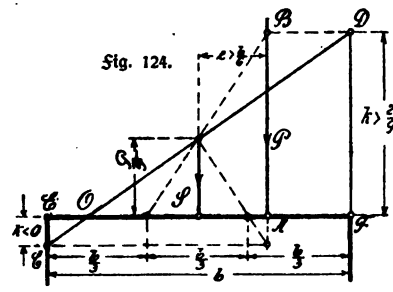


Fig. 124.

sowie: $k_{min} < \frac{P}{F}$,

aber: $k_{min} > 0$

wird. Das Spannungsbild wird mithin ein Trapez (Fig. 123).

4. Fall. Abstand $e > \frac{b}{6}$. Man sieht aus Gleich. (30a), daß:

$$k_{max} > \frac{2P}{F} \quad \text{und:} \quad k_{min} < 0,$$

also negativ wird. Das Spannungsbild ergibt zwei Dreiecke, von denen das eine die Verteilung der Druckspannungen (ΔDFO in Fig. 124), das andere die Verteilung der Zugspannungen (ΔCEO) darstellt.

Dürfen keine Zugspannungen auftreten, so nimmt man eine Entlastung der Fuge an, d. h. man betrachtet den Teil, in welchem die Zugspannungen eigentlich auftreten, als spannungslos oder als nicht vorhanden und berechnet die Druckspannungen nach der Formel:

$$k = \frac{2P}{3\xi \cdot l} \tag{31}$$

worin l die Länge der Fuge in cm und ξ den Abstand der Kraft P vom nächsten Rande bedeutet.

II. Anwendungen.

Beispiel. In einem Lagerraume von gegebenen Abmessungen (Fig. 125) dienen gußeiserne Säulen von 3,5 m Länge zur Unterstützung der auf ihnen gestoßenen gußeisernen Unterzüge, welche aus je zwei seitlich an die Säulen angeschlossenen I-Trägern bestehen sollen. Da es vorkommen kann, daß das auf eine Säule entfallende Deckenfeld zur Hälfte mit der Nutzlast, zur anderen Hälfte dagegen nur mit dem Eigengewicht der Decke belastet ist, so wird die Säule auf exzentrischen Druck beansprucht. Das Gewicht der belasteten Decke beträgt 1000 kg/qm, das der unbelasteten Decke 300 kg/qm. Außerdem wird von den im oberen Geschoß be-

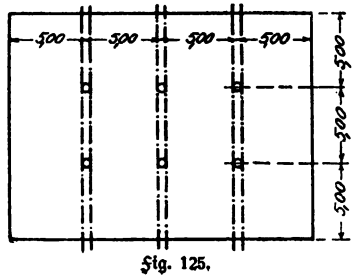


Fig. 125.

findlichen Säulen auf die des Untergeschosses, ein in der Säulenachse wirkender Druck von $P_1 = 18000$ kg übertragen. Der Querschnitt der Säulen des Untergeschosses ist zu ermitteln.

Lösung. a) Berechnung der Unterzüge. Die Belastung durch ein Feld ist: $Q = 5{,}0 \cdot 5{,}0 \cdot 1000 = 25000$ kg

$$M_{max} = \frac{Q \cdot l}{8} = \frac{25000 \cdot 500}{8} = 1562500 \text{ kgcm}$$

$$W = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{1562500}{1200} = 1302 \text{ cm}^3.$$

Gewählt zwei I N. Pr. Nr. 30 mit $2 \cdot W = 2 \cdot 652 = 1304$ cm³.

b) Berechnung der Säulen. Man berechnet zunächst die Säule für zentrischen Druck unter der hierbei ungünstigsten Annahme, daß die Decke mit der vollen Nutzlast belastet ist und untersucht sodann, ob der hierfür ermittelte Querschnitt auch für exzentrischen Druck genügt.

1. Berechnung für zentrischen Druck. Das erforderliche Trägheitsmoment ist, weil $P = Q + P_1 = 25000 + 18000 = 43000$ kg:

$$J_{min} = \frac{s P l^2}{10 E} = \frac{8 \cdot 43000 \cdot 350^2}{10 \cdot 1000000}$$

$$J_{min} = 4214 \text{ cm}^4.$$

Hierfür würde genügen eine Säule mit $D = 200$ mm, $\delta = 17{,}5$ mm, $F = 100$ qcm und $J_{min} = 4216$ cm⁴.

Die Tragfähigkeit für Druck wäre dann:

$$P = F \cdot k_d = 100 \cdot 500 = 50000 \text{ kg} > 43000 \text{ kg},$$

also auch ausreichend.

2. Berechnung für exzentrischen Druck. Wird die Säule auf exzentrischen Druck beansprucht, so erfährt der eine Träger des Unterzuges die volle Belastung des halben Feldes, nämlich:

$$P_2 = \frac{25000}{2} = 12500 \text{ kg}.$$

Der andere Träger erleidet nur die durch das Eigengewicht des halben Deckenfeldes hervorgerufene Belastung, also:

$$P_3 = 2{,}5 \cdot 5{,}0 \cdot 300 = 3750 \text{ kg}.$$

Außerdem wirkt in der Achse der Säule noch die Kraft:

$$P_1 = 18000 \text{ kg}.$$

Die Mittelkraft dieser drei gleichgerichteten Kräfte ist daher:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 = 18000 + 12500 + 3750$$

$$R = 34250 \text{ kg}.$$

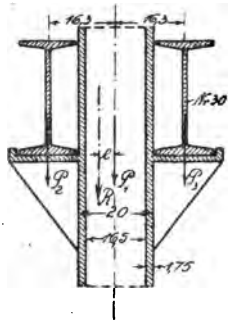


Fig. 126.

Man hat nunmehr die Lage der Mittelkraft zu bestimmen und erhält dadurch die Exzentrizität. Mit Rücksicht auf die gewählten Profile Nr. 30, deren Flanschbreite 12,5 cm beträgt, wird der Abstand der Trägermitten von der Mitte der Säule (Fig. 126):

$$a = \frac{20}{2} + \frac{12{,}5}{2} = 16{,}3 \text{ cm}.$$

Der Abstand der Mittelkraft von der Säulenachse wird mit Hilfe der allgemeinen Momentengleichung gefunden: $\Sigma M = R \cdot e$.

Da P_1 durch den in der Achse der Säule anzunehmenden Drehpunkt geht, so wird das Moment von $P_1 = 0$ und man erhält:

$$R \cdot e = P_2 \cdot 16{,}3 - P_3 \cdot 16{,}3 = 16{,}3 \cdot (P_2 - P_3)$$

$$e = \frac{16{,}3 \cdot (P_2 - P_3)}{R} = \frac{16{,}3 \cdot (12500 - 3750)}{34250} = 4{,}2 \text{ cm}.$$

Die im Säulenquerschnitt auftretenden Spannungen findet man mit Hilfe von Gleichung (30):

$$k = \frac{R}{F} \pm \frac{M}{W} = \frac{R}{F} \pm \frac{R \cdot e}{W} \quad \text{und da:} \quad W = \frac{J_{\min}}{\frac{D}{2}} = \frac{4216}{10} = 422 \text{ cm}^3,$$

so wird: $$k = \frac{34250}{100} \pm \frac{34250 \cdot 4{,}2}{422} = 342{,}5 \pm 341.$$

Demnach wird: $k_{\max} = k_d = 342{,}5 + 341 = 683{,}5$ kg/qcm.

Da für Gußeisen nur $k_d = 500$ kg/qcm zulässig ist, so genügt der gefundene Querschnitt für exzentrische Beanspruchung nicht.

Wählt man daher einen Querschnitt mit $D = 20$ cm, $\delta = 2{,}75$ cm, $F = 149$ qcm, $J_{\min} = 5684$ cm^4, $W = 568$ cm^3, so erhält man, da derselbe Durchmesser wie zuvor auch für P_2 und P_3 dieselben Hebelarme $a = 16{,}3$ cm und dieselbe Exzentrizität $e = 4{,}2$ ergibt:

$$k = \frac{34250}{149} \pm \frac{34250 \cdot 4{,}2}{568} = 230 \pm 244.$$

Demnach wird:

$$k_{\max} = 474 \text{ kg/cm}^2 < 500 \text{ kg/qcm} \quad \text{und} \quad k_{\min} = -14 \text{ kg/qcm}.$$

Da in Säulen Gußeisen mit 250 kg auf Biegung beansprucht werden darf, so genügt der Querschnitt, doch ist die Säule wegen der auftretenden Zugspannungen durch Verankerung gegen Abheben vom Fundament zu sichern.

I. Untersuchung von Gewölben und Widerlagern.

1. Allgemeines.

Ein Gewölbe kann aufgefaßt werden als ein Träger auf zwei Stützen mit gekrümmter Längsachse. Die Belastung ist lotrecht, jedoch werden auf die Auflager, die hier Widerlager oder Kämpfer genannt werden, schiefe Drucke ausgeübt. Daher entstehen hier wagerechte Seitenkräfte. Das Eigengewicht spielt eine große Rolle und ist deshalb neben der Verkehrslast stets zu berücksichtigen. Das Eigengewicht setzt sich aus dem Gewicht des Gewölbes und der Überschüttung zusammen, welch letztere jedoch bei unbelasteten Gewölben fehlt.

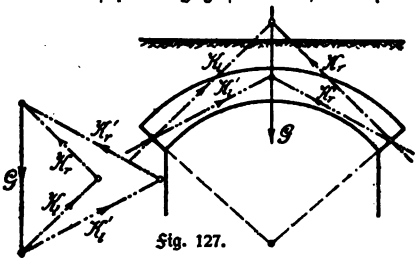


Fig. 127.

Die auf das Gewölbe wirkenden Kräfte sind:

1. das bekannte Eigengewicht mit der darauf ruhenden Belastung;
2. die beiden unbekannten Kämpferdrücke K_l und K_r (Fig. 127).

Diese drei Kräfte müssen sich das Gleichgewicht halten. Die Aufgabe bleibt, wie Fig. 127 zeigt, statisch unbestimmt, da sich, wie sofort zu erkennen ist, unzählige Kämpferdrücke mit dem Gewicht G im Gleichgewicht befinden. Man muß daher die Angriffspunkte der Kämpferdrücke annehmen und außerdem festsetzen, daß die Drucklinie, worüber später noch gesprochen wird, durch irgend einen Punkt des Gewölbes gehen soll.

Soll ein Gewölbe standsicher sein, so müssen folgende drei Bedingungen erfüllt sein:

1. es darf kein Gleiten in einer Fuge stattfinden;
2. es darf kein Kippen um eine Fugenkante eintreten;
3. das Material darf nicht zermalmt werden.

Die erste Bedingung, daß kein Gleiten stattfinden darf, wird erfüllt, wenn der Druck auf die Fuge mit der in seinem Angriffspunkt auf der Fuge errichteten Senkrechten einen Winkel einschließt, welcher kleiner oder höchstens ebenso groß ist, als der Reibungswinkel des Wölbmaterials. Unter dem Reibungswinkel versteht man denjenigen Neigungswinkel einer schiefen Ebene, bei welchem ein Körper von selbst infolge seiner Schwere abwärts zu gleiten beginnt. Die Tangente

des Reibungswinkels nennt man den Reibungskoeffizienten. Die Größe des Reibungswinkels und Reibungskoeffizienten findet man in jedem Tabellenwerke.

Ein Kippen tritt nicht ein, wenn die Mittelkraft an keiner Stelle aus dem mittleren Drittel, dem Kern des Gewölbes heraustritt.

Ein Zermalmen des Materials ist ausgeschlossen, wenn die nach der Formel für exzentrischen Druck zu ermittelnden Kantenpressungen innerhalb der zulässigen Grenzen bleiben.

II. Unbelastete Gewölbe.

Die beiden Hälften eines Gewölbes stützen sich im Scheitel gegenseitig. Daher übt jede Gewölbehälfte daselbst auf die andere einen wagerechten Druck aus, welcher Seitenschub oder Horizontalschub genannt wird.

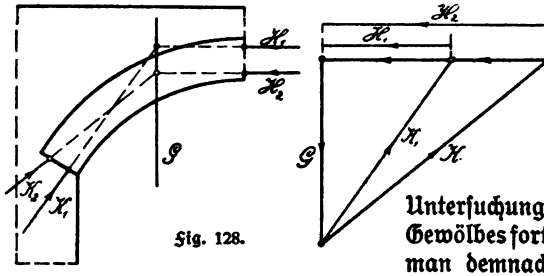


Fig. 128.

Denkt man sich bei der statischen Untersuchung die eine Hälfte des Gewölbes fortgenommen, so muß man demnach im Scheitel eine wagerechte Kraft H anbringen, welche ebenso groß ist wie der Seitenschub.

Aus Fig. 128 erkennt man, daß es unzählige Seitenschübe gibt. Da jedoch nur die im Kerne des Gewölbes wirkenden Kräfte in Betracht kommen, und von diesen wieder diejenigen, welche die ungünstigsten Bedingungen ergeben, so genügt die Berücksichtigung der durch die Kerngrenzen, also durch das obere und untere Drittel des Scheitels gehenden Seitenschübe. Aus Fig. 128 ist ferner unschwer zu erkennen, daß der kleinste Seitenschub sich ergibt, wenn H durch das obere Drittel des Scheitels und der Kämpferdruck K durch das untere Drittel des Kämpfers geht. Der größte Seitenschub ergibt sich dagegen, wenn H durch das untere Drittel des Scheitels und K durch das obere Drittel des Kämpfers geht. Um dies zu erkennen, braucht man sich nur in der Hauptfigur einen anderen Angriffspunkt des Kämpferdruckes zu denken und zu der dadurch bestimmten Richtung der Kraft K in der Kräftefigur eine Parallele zu ziehen. — Je tiefer also der Seitenschub angreift, um so größer wird er.

Durch Anordnung eines Gelenkes kann man dem Kämpferdruck einen bestimmten Angriffspunkt geben und damit die statische Unbestimmtheit des Gewölbes beseitigen (Fig. 129).

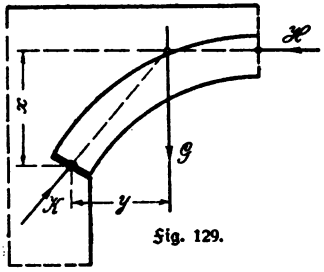


Fig. 129.

Die Größe des Seitenschubes findet man nach Fig. 129 aus:

$$H \cdot x = G \cdot y, \quad \text{woraus:} \quad H = \frac{G \cdot y}{x}. \qquad (32)$$

Bei der statischen Untersuchung betrachtet man am besten einen Streifen von 1 m Tiefe. Auch genügt es, da die Belastung durch das Eigengewicht, die bei unbelasteten Gewölben allein wirkt, symmetrisch ist, nur eine Gewölbehälfte zu untersuchen. Man zerlegt diese Gewölbehälfte in einzelne kleine Abschnitte, bestimmt deren Gewichte und setzt zunächst das erste Gewicht G_1 mit dem Seitenschub H zur Mittelkraft R_1 zusammen, diese Mittelkraft mit dem zweiten Gewicht G_2 zu einer zweiten Mittelkraft R_2 uff. bis man am Kämpfer anlangt. Den sich so ergebenden Linienzug H, R_1, R_2, R_3 ... nennt man die **Drucklinie** des Gewölbes.

Man unterscheidet entsprechend dem größten Seitenschub eine **Maximaldrucklinie**, welche nach dem früher Gesagten demnach durch das untere Drittel des Scheitels und das obere Drittel des Kämpfers gehen muß, und entsprechend dem kleinsten Seitenschub eine **Minimaldrucklinie**, welche durch das obere Drittel des Scheitels und das untere Drittel des Kämpfers gehen muß. Häufig wird auch eine **mittlere Drucklinie**, durch die Mitte des Scheitels und des Kämpfers gehend, gezeichnet. Ein Beispiel möge die Untersuchung zeigen.

Beispiel. Für das in Fig. 130 gegebene Gewölbe soll die mittlere Drucklinie gezeichnet werden.

Lösung. Das Gewölbe wird in fünf Abschnitte von 0,93 m mittlerer Länge zerlegt, welche genügend genau als Rechtecke berechnet werden können. Das Gewicht eines Streifens ist dann, wenn 1 cbm Gewölbemauerwerk 2000 kg wiegt:

$$G_1 = G_2 = G_3 \cdots = 0{,}93 \cdot 0{,}50 \cdot 1{,}0 \cdot 2000 = 930 \text{ kg}.$$

und das Gesamtgewicht (die Mittelkraft der Einzelgewichte):

$$G = 5 \cdot 930 = 4650 \text{ kg}.$$

Die Lage der Mittelkraft G wird mit Hilfe des Kraft- und Seilecks in bekannter Weise ermittelt. Ihr Abstand vom Angriffspunkt D des Kämpfers, welcher

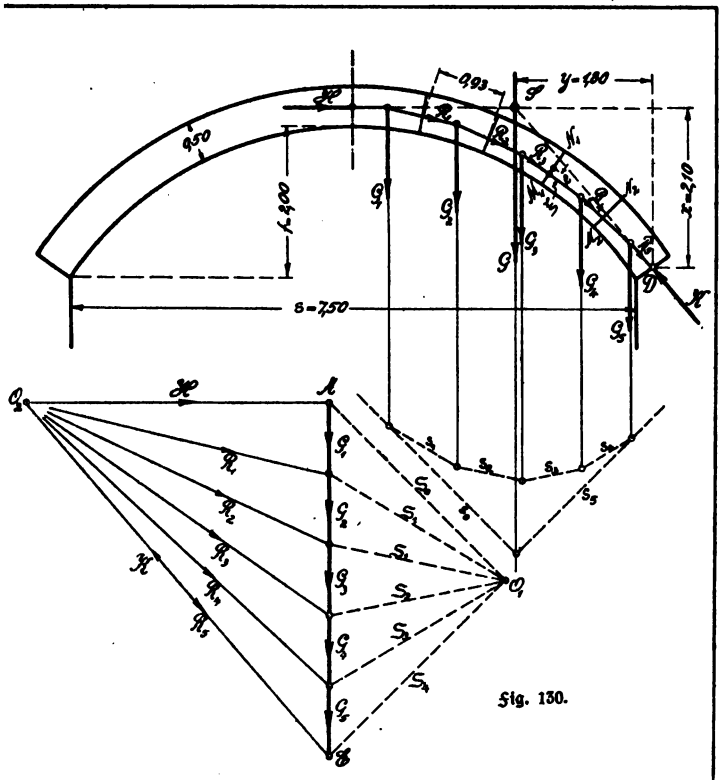


Fig. 130.

ei der Bestimmung des Seitenschubes H als Drehpunkt anzunehmen ist, ergibt ich nach der Zeichnung zu $y = 1{,}80$ m, der Abstand des Seitenschubes von) zu $x = 2{,}10$ m. Demnach wird:

$$H = \frac{G \cdot y}{x} = \frac{4650 \cdot 1{,}80}{2{,}10} = 3986 \text{ kg}.$$

Durch Zeichnung findet man H, indem man in der Hauptfigur den chnittpunkt S von H und G mit D verbindet. Da sich die drei Kräfte I, G und K, falls Gleichgewicht herrschen soll, in einem Punkt schneiden üssen, so erhält man durch die Gerade SD die Lage des Kämpferdruckes K. ieht man nun im Kraftеck durch A und E Gleichlaufende zu H und K,

so erhält man diese beiden Kräfte auch nach Größe und Sinn (das Kraftek muß geschlossen sein). Man mißt und findet:

$$H = 4{,}0 \text{ cm} = 4{,}0 \cdot 1000 = 4000 \text{ kg},$$

was mit dem durch Rechnung gefundenen Ergebnis fast genau übereinstimmt.

Nunmehr wird H mit G_1 zu R_1, sodann R_1 mit G_2 zu R_2, R_2 mit G_3 zu R_3, R_3 mit G_4 zu R_4, R_4 mit G_5 zu R_5 zusammengesetzt und die Drucklinie gezeichnet, wie die Fig. darstellt.

Man sieht sofort, daß die Drucklinie in den Fugen $M_1 N_1$ und $M_2 N_2$ aus dem Kern des Gewölbes heraustritt. Das Gewölbe ist daher nicht standsicher und müßte verstärkt werden, was durch gleichmäßige Vergrößerung der Gewölbestärke d oder durch zunehmende Vergrößerung nach dem Kämpfer hin erfolgen kann.

Ein Gleiten in einer Fuge wird nicht eintreten, da man aus der Abbildung erkennen kann, daß die auf die einzelnen Fugen wirkenden Mittelkräfte von der Lotrechten auf die Fugen nur unter einem sehr kleinen Winkel abweichen.

Die Kantenpressungen werden mit Hilfe der bekannten Formeln über exzentrische Druckbeanspruchung ermittelt. Für die Fuge $M_1 N_1$ ist z. B. nach Zeichnung $e = 9{,}5$ cm, $R_3 = 4870$ kg. Streng genommen müßte die senkrechte Seitenkraft von R_3 für die Ermittelung der Kantenpressung benutzt werden. Da aber R_3 größer ist als diese, so kann man auch R_3 in die Formel einsetzen, was der Sicherheit nur zu gute kommt. Dann erhält man mit Hilfe von Gleichung (30a):

$$k = \frac{R_3}{F} \cdot \left(1 \pm \frac{6e}{b}\right) = \frac{4870}{50 \cdot 100} \cdot \left(1 \pm \frac{6 \cdot 9{,}5}{50}\right) = 0{,}974 \cdot (1 \pm 1{,}14)$$

und hieraus:

$$k_{max} = 2{,}18 \text{ kg/qcm}$$

$$k_{min} = -0{,}14 \text{ kg/qcm}.$$

Mithin wird mit k_{max} die zulässige Spannung nicht überschritten. Da jedoch k_{min} negativ wird, so treten Zugspannungen auf. Sollen diese ausgeschlossen sein, so muß man Fugenentlastung annehmen und nach Gleichung (31) rechnen. Dabei erhält man:

$$k = \frac{2R_3}{3\xi \cdot b} = \frac{2 \cdot 4870}{3 \cdot \left(\frac{50}{2} - 9{,}5\right) \cdot 50} = 4{,}2 \text{ kg/qcm},$$

also eine zulässige Spannung.

Für das Widerlager wird $e = O$, mithin ist hier zentrische Belastung vorhanden. Die angreifende Kraft ist R_5, welche den gleich großen, in derselben Geraden, aber entgegengesetzt wirkenden Kämpferdruck K hervorruft. Nach Zeichnung ist $R_5 = 6120$ kg, so daß:

$$k = \frac{R_5}{F} = \frac{6120}{50 \cdot 100} = 1{,}224 \text{ kg/qcm}$$

wird, was zulässig ist.

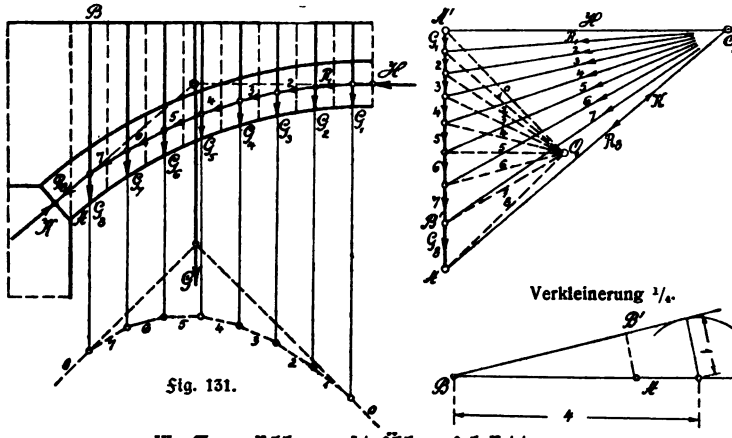


Fig. 131.

III. Gewölbe mit Überschüttung.

Ist ein Gewölbe mit Erde überschüttet, so teilt man es in der Regel ohne Rücksicht auf die Anordnung der Fugen, aber einschließlich der Überschüttung in schmale, senkrechte Streifen von gleicher Breite ein. Macht man die Streifen nicht zu breit, so kann man der größeren Einfachheit wegen ihre Mittellinien als Schwerlinien betrachten. In diesen wirken dann die Gewichte der einzelnen Streifen.

Wiegt die Überschüttungserde ebenso viel wie das Mauerwerk, dann entsprechen bei gleicher Breite der Streifen deren Mittellinien dem Gewichte der Streifen. Sind die Streifen z. B. 0,50 m breit, und untersucht man wieder einen Gewölbeabschnitt von 1,0 m Tiefe, so bedeutet 1 m Höhe der Mittellinien der Streifen einen Rauminhalt von 0,5 · 1,0 · 1,0 = 0,5 cbm, und bei einem Erd- und Mauergewichte von 1800 kg/cbm demnach ein Gewicht von 0,5 · 1800 = 900 kg.

Man kann daher nach einem gewählten Kräftemaßstabe die Mittellinien der Streifen gleich als Gewichte im Krafteck auftragen. Will man die Kräfte nicht in zu großem Maßstabe erhalten, so benutzt man zur Auftragung, wie dies in Fig. 131 geschehen ist, einen Verkleinerungsmaßstab. Die Verkleinerung ist hier = $\frac{1}{4}$ gewählt. Der Gebrauch des Maßstabes ergibt sich aus den Bezeichnungen der Fig. 131 von selbst.

Die Zeichnung der Drucklinie und die weitere Untersuchung erfolgt genau wie zuvor. In Fig. 131 ist wieder die mittlere Drucklinie gezeichnet.

IV. Gewölbe mit Überschüttung und Belastung.

Häufig besitzt die Überschüttung ein anderes Gewicht als das des Mauerwerkes, auch tritt in der Regel noch eine Auflast (Verkehrslast) hinzu. Dann werden die Gewichte der Überschüttung und der Auflast in Mauerwerksgewicht umgerechnet. Das Verfahren wird am besten durch ein Beispiel an Hand von Fig. 132 gezeigt.

Das Gewölbe sei wieder symmetrisch belastet, so daß die Kämpferdrücke an beiden Widerlagern gleich werden, und mithin nur eine Gewölbehälfte untersucht werden muß. Die Auflast betrage 400 kg/qm, das Gewicht der Erde 1600 kg/cbm, das Gewicht des Mauerwerkes 2000 kg/cbm.

Zunächst ist festzustellen, welche Höhe ein dem Gewichte der Auflast entsprechender Erdkörper erhalten muß. Diese Höhe ergibt sich aus:

$$h_1 = \frac{400}{1600} = 0{,}25 \text{ m}.$$

Um dieses Maß ist, wie die Figur zeigt, die Überschüttung zu vergrößern. Die Überschüttung ist sodann in Mauerwerk umzurechnen. Da das Gewicht des Mauerwerkes größer ist als das der Erde, so muß ein Erdkörper vom Gewichte des Mauerwerkes naturgemäß einen geringeren

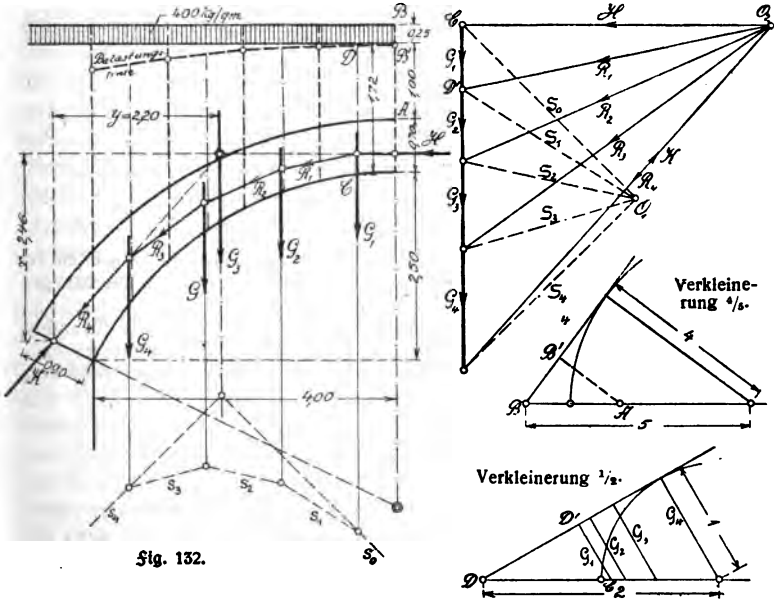


Fig. 132.

Rauminhalt einnehmen als ein leichterer Körper von dem gegebenen Erdgewicht. Die Höhen der Überschüttung einschließlich Auflast sind daher zu verringern. Diese Verkleinerung muß betragen:

$$\frac{1600}{2000} = \frac{4}{5}.$$

Das Gewölbe wird wieder in einzelne senkrechte Streifen zerlegt. Dabei soll der links vom Widerlager liegende Teil des Gewölbes samt Überschüttung zum Widerlager gerechnet werden. Der hierdurch entstehende Fehler ist belanglos; dafür erhält man ein rundes Teilungsmaß (hier 1 m). Nunmehr trägt man mit Hilfe des Verkleinerungsmaßstabes $^4/_5$ in den durch die Teilpunkte gezogenen Senkrechten die auf Mauergewicht zurückgeführten Höhen der Überschüttung einschließlich Auflast von der äußeren Leibung des Gewölbes nach oben auf. Z. B. wird AB in den Verkleinerungsmaßstab übertragen, daselbst $AB' = \frac{4}{5} AB$ abgegriffen und in der Hauptfigur von A aus nach oben aufgetragen. Der so gewonnene Punkt B' ist ein Punkt der dem Gewichte des Mauerwerkes entsprechenden neuen Belastungslinie, deren andere Punkte in gleicher Weise gewonnen werden.

Die Mittellinien der Streifen können wieder als Gewichte der Streifen aufgefaßt werden. Da 1 cbm Mauerwerk 2000 kg wiegt, so entspricht bei einer Breite der Streifen von 1,0 m demnach 1 cm Höhe der Streifen einem Gewichte von 2000 kg, wenn die Tiefe des Gewölbes, wie üblich, wieder = 1,0 m angenommen wird.

Rechnerisch ergeben sich diese Gewichte wie folgt:

$$G_1 = 1{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 1{,}72 \cdot 2000 = 3440 \text{ kg}$$
$$G_2 = 1{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 1{,}92 \cdot 2000 = 3840 \text{ kg}$$
$$G_3 = 1{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 2{,}34 \cdot 2000 = 4680 \text{ kg}$$
$$G_4 = 1{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 3{,}15 \cdot 2000 = 6300 \text{ kg}$$
$$\Sigma G = G = 18260 \text{ kg}.$$

Da die Streifen als Trapeze aufgefaßt werden können, so greifen in ihren Schwerpunkten die Gewichte an (bei schmalen Streifen wieder genügend genau in den Mitten der Trapeze).

Um das Krafteck nicht zu groß werden zu lassen, sind die Gewichte mit Hilfe des Verkleinerungsmaßstabes $^1/_2$ um die Hälfte verkleinert aufgetragen worden, so daß im Krafteck daher 1 cm Länge ein Gewicht von 4000 kg darstellt.

Der Seitenschub ergibt sich aus:

$$H = \frac{G \cdot y}{x} = \frac{18260 \cdot 2{,}20}{2{,}46} = 16300 \text{ kg},$$

was mit der Zeichnung übereinstimmt, da hier $H = 4{,}07$ cm $= 4{,}07 \cdot 4000 = 16280$ kg ist. Der Kämpferdruck wird in gleicher Weise wie oben gefunden. Rechnerisch erhält man ihn aus:

$$K = \sqrt{H^2 + G^2} = \sqrt{16300^2 + 18260^2} = 24477 \text{ kg}.$$

In der Zeichnung findet man $K = 6{,}125\ \text{cm} = 6{,}125 \cdot 4000 = 24500\ \text{kg}$. Gezeichnet wurde entsprechend dem größten Seitenschube die Maximaldrucklinie, welche also durch das untere Drittel des Scheitels und das obere Drittel des Kämpfers geht. Die Konstruktion erfolgt im übrigen in gleicher Weise, wie sonst. Die Drucklinie tritt an keiner Stelle aus dem Kerne des Gewölbes heraus. Die Untersuchung gegen Gleiten und Zermalmen weicht von der bereits beschriebenen nicht ab.

V. Unsymmetrisch belastete Gewölbe.

Bei Gewölben, welche noch eine Verkehrslast aufzunehmen haben, tritt die ungünstigste Beanspruchung im allgemeinen dann ein, wenn die eine Gewölbehälfte mit der Verkehrslast, die andere dagegen nur mit dem Eigengewicht und der Überschüttung belastet ist. Da die Belastung hier unsymmetrisch ist, wird auch die Drucklinie unsymmetrisch, so daß die Untersuchung für beide Gewölbehälften durchgeführt werden muß. Man rechnet auch hier (wovon jedoch in Fig. 133 zur größeren Deutlichkeit der Darstellung Abstand genommen wurde) wieder Überschüttung und Auflast in Mauergewicht um und zeichnet dafür die Belastungslinie. Die Einteilung des Gewölbes in Streifen und die Bestimmung der Gewichte der Streifen erfolgt wie früher. Die Lage der Mittelkräfte G_{1-4} und G_{5-8} für beide Gewölbehälften findet man mit Hilfe des Seileckes. Nunmehr betrachtet man zunächst jede Gewölbehälfte für sich. Auf die belastete linke Gewölbehälfte wirkt das Gewicht G_{1-4} und der Kämpferdruck K_l'. Denkt man sich die rechte Gewölbehälfte vorhanden, aber gewichtslos, so muß sie, falls Gleichgewicht herrschen soll, auf die linke Gewölbehälfte gleichfalls eine Kraft ausüben, welche einerseits natürlich durch den für die Drucklinie im rechten Kämpfer gewählten Punkt, andererseits aber mit Rücksicht auf das Gleichgewicht auch durch den Schnittpunkt von G_{1-4} und K_l' gehen muß. Damit erhält man die Richtung des Kämpferdruckes K_r' und mit Hilfe des Kräftedreieckes nunmehr auch K_l' und K_r' nach Größe und Sinn. In gleicher Weise ermittelt man für die rechte, unbelastete Gewölbehälfte die Kämpferdrücke K_l'' und K_r''. Nun wirkt aber nicht, wie angenommen, nur die Belastung einer Gewölbehälfte, sondern die Belastungen beider Hälften gleichzeitig, so daß auch im linken Widerlager die Kämpferdrücke K_l' und K_l'' und im rechten die Kämpferdrücke K_r' und K_r'' gleichzeitig auftreten. Diese sind daher im Krafteck zu ihren Mittelkräften K_l und K_r zusammengesetzt. Nunmehr kann, von einem Widerlager beginnend, die Drucklinie in bekannter Weise

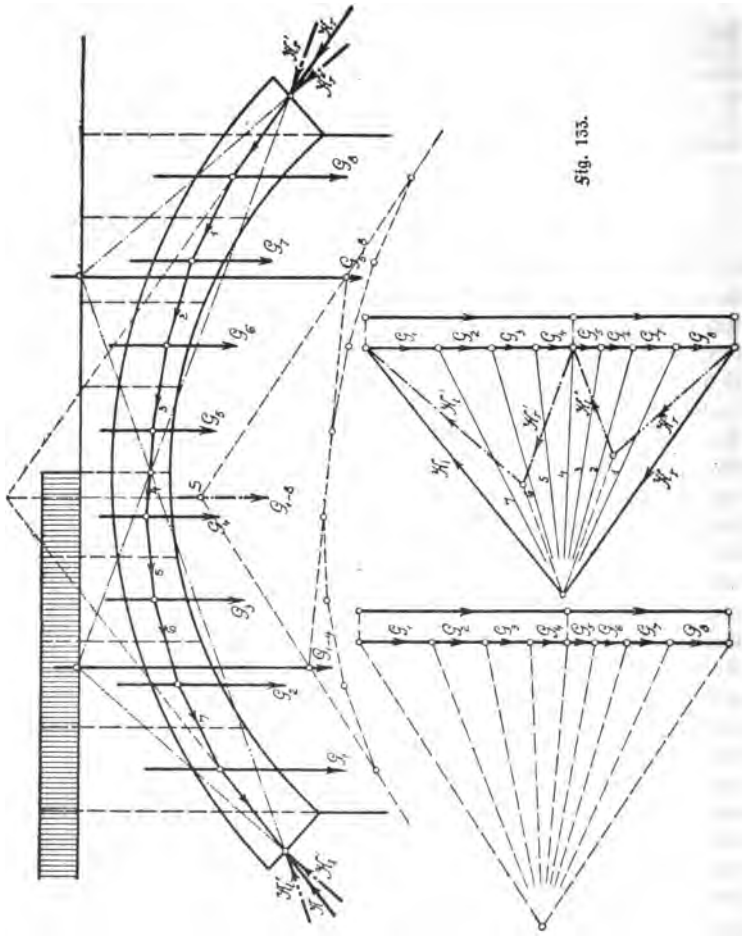


Fig. 133.

gezeichnet werden. Fig. 133 gibt die Maximaldrucklinie wieder. Hat man richtig gearbeitet, so muß die Mittelkraft sämtlicher Gewichte G_{1-8} durch den Schnittpunkt S' der Kämpferdrücke K_l und K_r hindurchgehen, weil diese drei Kräfte, wenn man das ganze Gewölbe betrachtet, im Gleichgewichte sein und sich daher in einem Punkte schneiden müssen.

Zum Nachweis der Standfestigkeit eines Gewölbes zeichnet man in der Regel für volle Belastung des ganzen Gewölbes die mittlere Drucklinie und die Minimalstützlinie, und außerdem für einseitige Belastung durch die Verkehrslast eine weitere Stützlinie.

VI. Untersuchung von Gewölbepfeilern.

Unter der Voraussetzung gleicher Spannweite der Gewölbe und beiderseits voller Belastung wird ein Mittelpfeiler symmetrisch belastet (Fig. 134). Die Kämpferdrücke, welche auf den Pfeiler übertragen werden, sind alsdann gleich groß und werden mit dem Gewichte des Pfeilers zur Gesamt-Mittelkraft R in bekannter Weise zusammengesetzt. R geht in diesem Falle durch die Mitte der untersten Fuge, steht senkrecht auf ihr und ruft daher zentrische Belastung des Bodens hervor.

Am ungünstigsten wird ein Mittelpfeiler beansprucht, wenn das eine anstoßende Gewölbe voll, das andere nur mit Eigengewicht und Überschüttung belastet ist (Fig. 135). Denn in diesem Falle sind die aufzunehmenden Kämpferdrücke verschieden groß; das Gewölbe ist daher einseitigem Schube ausgesetzt, die Mittelkraft muß aus der Mitte der untersten Fuge heraustreten.

In Fig. 135 ist das linke Gewölbe vollbelastet, so daß die Mittelkraft R den Pfeiler nach rechts zu drücken sucht. Wenn dies tatsächlich eintritt, so muß sich im Gewölbe die Scheitelfuge unten und die Kämpferfuge oben öffnen (Fig. 136), wie es der Minimaldrucklinie entspricht. Gleichzeitig sucht das rechte Gewölbe nach oben auszuweichen, so daß sich die Scheitelfuge nach oben und die Kämpferfuge nach unten öffnet (Fig. 136), entsprechend der Maximaldrucklinie.

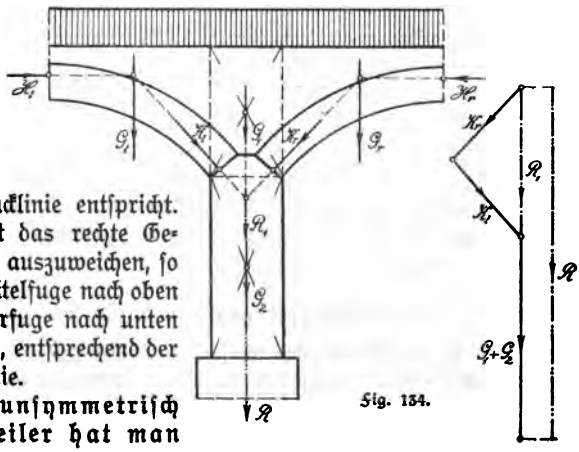


Fig. 134.

Bei einem unsymmetrisch belasteten Pfeiler hat man

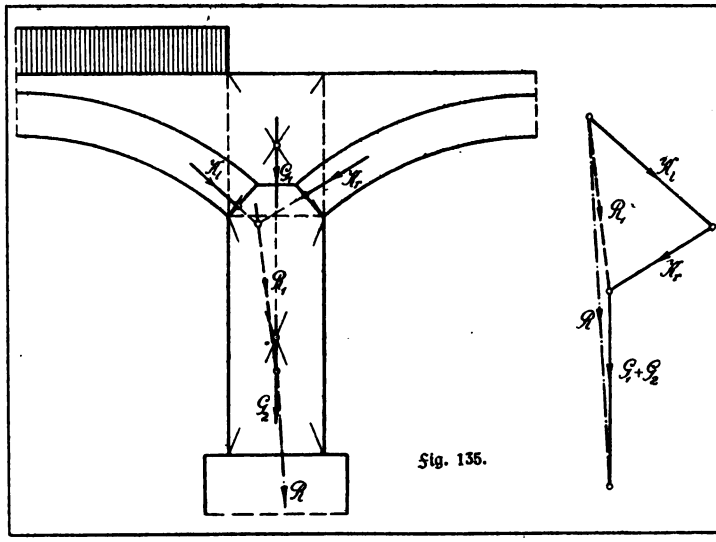


Fig. 135.

daher für das belastete Gewölbe die Minimaldrucklinie und für das unbelastete Gewölbe die Maximaldrucklinie zu zeichnen. Die hieraus sich in bekannter Weise ergebenden Kämpferdrücke sind mit den Gewichten des Pfeilers zur Mittelkraft R zusammenzusetzen, R greift die unterste Fuge exzentrisch an. Die weitere Untersuchung, ob Sicherheit gegen Kanten, Gleiten und Zermalmen vorhanden ist, erfolgt ebenso wie bei der Untersuchung des Gewölbes selbst beschrieben wurde. Die dort gestellten Bedingungen sind also auch hier zu erfüllen.

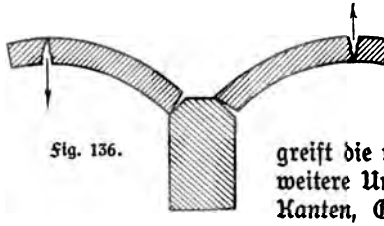


Fig. 136.

VII. Untersuchung der Widerlager.

Die auf das Widerlager wirkenden Kräfte sind außer dem Gewichte des Widerlagers, das in der Regel aus mehreren Einzelgewichten zusammengesetzt zu denken ist, der Kämpferdruck und der Erddruck. Diese Kräfte sind in bekannter Weise nach Fig. 137 zur Mittelkraft R zu-

sammenzusetzen. Entsprechend dem Angriffspunkte von R sind hiernach die Bodenpressungen wie sonst zu ermitteln. Es fragt sich nur, für welchen Kämpferdruck die Verhältnisse sich am ungünstigsten gestalten.

Das Widerlager sucht dem vom Kämpferdruck ausgeübten Schube am ehesten nachzugeben, wenn das Gewölbe — aber nicht das Widerlager selbst — vollbelastet ist, weil es in diesem Falle den größten Schub ausübt. Gibt das Widerlager nach, was durch Ausweichen nach links erfolgt (Fig. 137), so öffnet sich die Scheitelfuge unten und die Kämpferfuge oben, entsprechend der Minimaldrucklinie. Daher ist bei der Untersuchung der bei Vollbelastung des Gewölbes aus der Minimaldrucklinie sich ergebende Kämpferdruck zugrunde zu legen.

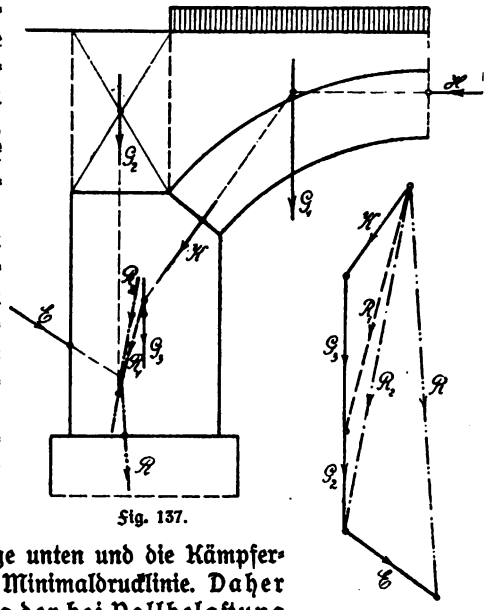


Fig. 137.

Der Erddruck wird häufig ganz vernachlässigt, weil er die Richtung der Mittelkraft, wie aus der Abbildung sofort erkannt wird, nur günstig beeinflußt.

Für die Standsicherheit des Widerlagers gegen Kanten, Gleiten und Zermalmen gelten dieselben Bedingungen, wie bisher.

K. Die Berechnung größerer Dachkonstruktionen.

1. Allgemeines.

Größere Dachkonstruktionen, zu denen namentlich solche aus Eisen zählen, sind Fachwerksträger auf zwei Stützen oder Freiträger. Da bekanntlich das Dreieck eine starre Verbindung bildet, sind solche Konstruktionen aus einzelnen Stäben zu Dreiecken zusammengesetzt, so daß sich eine unverschiebliche Figur ergibt. Wir sahen bereits, daß man

die Punkte, in denen die Stabenden zusammenstoßen, **Knotenpunkte** nennt. Wenn möglich, läßt man die äußeren Kräfte, die Lasten, in den Knotenpunkten angreifen, weil sie in diesem Falle in den einzelnen Stäben nur Zug- oder Druckspannungen hervorrufen (vgl. S. 24). Doch werden einzelne Stäbe mitunter auch zwischen den Knotenpunkten durch Pfetten belastet. Solche Stäbe sind dann auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen.

Derartige Dachkonstruktionen eignen sich besonders für große Stützweiten und werden daher namentlich bei Hallen ausgeführt.

Die Belastung setzt sich zusammen aus

1. dem Eigengewicht,
2. dem Schneedruck,
3. dem Winddruck.

Das Eigengewicht ist wesentlich abhängig von der Art der Dacheindeckung, der Schneedruck dagegen von der Dachneigung. Je steiler das Dach ist, desto leichter rutscht der Schnee ab, so daß man bei Dächern, welche einen größeren Neigungswinkel als 50^0 besitzen, den Schneedruck bei der Rechnung ganz vernachlässigen kann.

Der Wind beansprucht das Dach in der Regel nur von einer Seite her. Bei genaueren Untersuchungen ist der rechnerische Nachweis daher für linksseitigen, wie für rechtsseitigen Winddruck zu führen. Für die Bestimmung der Auflagerdrücke greift alsdann das auf S. 39 Gesagte Platz, da hierbei die Anordnung des Auflagers, ob beweglich oder fest, von ausschlaggebender Bedeutung ist. Bei flachen Dächern ist der Einfluß des Windes jedoch nicht so groß, wie bei bei steilen Dächern, so daß man hier in der Regel die Belastung durch den Wind, ebenso wie diejenige durch Eigengewicht und Schnee, als gleichmäßig über beide Dachflächen verteilt und daher lotrecht wirkend annimmt. Auf diese Weise ergibt sich nur lotrechte Belastung, mithin entstehen auch nur lotrechte Auflagerdrücke.

Die Größe der Belastung durch Eigengewicht, Schnee und Wind kann aus Tabellen entnommen werden. Daher sollen hier keine Angaben darüber gemacht werden. Auch soll nur das abgekürzte Verfahren, bei welchem der Winddruck in die lotrechte Belastung eingerechnet wird, berücksichtigt werden.

II. Ermittelung der Spannungen und Querschnitte.

Für die Ermittelung der Spannungen hat man zwei Verfahren. Auf die rechnerische Ermittelung nach dem Ritterschen Schnittverfahren soll jedoch nicht eingegangen, vielmehr nur das zeichnerische Verfahren betrachtet werden.

In Fig. 138 ist ein sog. französischer Dachstuhl (Polonceaubinder) von 12,00 m Stützweite gegeben. Die Ermittelung der inneren Spannkräfte erfolgt hier in derselben Weise, wie sie auf S. 24 bis 28 besprochen wurde. Auch hier sind die Knotenpunkte besonders herausgezeichnet, der Einfachheit halber aber nur die Gleichgewichtsfiguren gezeichnet.

Im Knotenpunkte I wirken der Auflagerdruck A und die Belastung $\frac{P}{2}$ für das anstoßende halbe Feld. Unter Annahme einer Binderentfernung $= 4{,}0$ m und einer Feldbreite $= \frac{l}{4} = 3{,}00$ m, sowie einer Belastung durch Eigengewicht, Schnee und Wind von $q = 250$ kg/qcm Grundrißfläche wird die Belastung eines ganzen Feldes:

$$P = 3{,}0 \cdot 4{,}0 \cdot 250 = 3000 \text{ kg}.$$

Ein Teil der Auflagerdrücke A und B wird durch die in den Auflagern wirkenden Lasten $\frac{P}{2}$ aufgehoben. Für die Größe des Auflagerdruckes, soweit er von Einfluß auf die Spannkräfte in den benachbarten Stäben ist, kommen daher nur die Belastungen in den Zwischenknotenpunkten in Betracht. Da Dachkonstruktion und Belastung symmetrisch sind, so ist:

$$A = B = \frac{3P}{2} = 1{,}5P = 1{,}5 \cdot 3000 = 4500 \text{ kg}.$$

Der Einfluß von $\frac{P}{2}$ auf A ist damit berücksichtigt. Das ermittelte A ruft in den anstoßenden Stäben O_1 (Obergurt) und U_1 (Untergurt) Spannkräfte hervor, welche mit A im Gleichgewicht sein müssen. Es muß sich aus diesen drei Kräften also ein geschlossenes Krafteck zeichnen lassen. Bringt man die aus dem Krafteck sich ergebenden Pfeilrichtungen an den Schnittstellen des Knotenpunktes I an, so zeigt O_1 auf den Knotenpunkt zu, in O_1 herrscht also Druck; U_1 zeigt vom Knotenpunkte weg, in U_1 herrscht demnach Zug. Zugspannungen sind mit +, Druckspannungen mit — bezeichnet.

Würde man jetzt zu Knotenpunkt III gehen, so hätte man nur eine bekannte Kraft, U_1, dagegen die unbekannten U_2, V_1 und D_1. Die Aufgabe ist daher nicht zu lösen; man muß mithin vorher Punkt II betrachten. Hier sind bekannt P und O_1, unbekannt V_1 und O_2; die Aufgabe ist also lösbar. Man reiht O_1 und P so aneinander, daß ihre Pfeilrichtungen sich folgen und zieht durch die freien Enden Gleichlaufende zu V_1 und O_2. Die vier Kräfte müssen im Gleichgewicht sein, die Pfeilrichtungen der

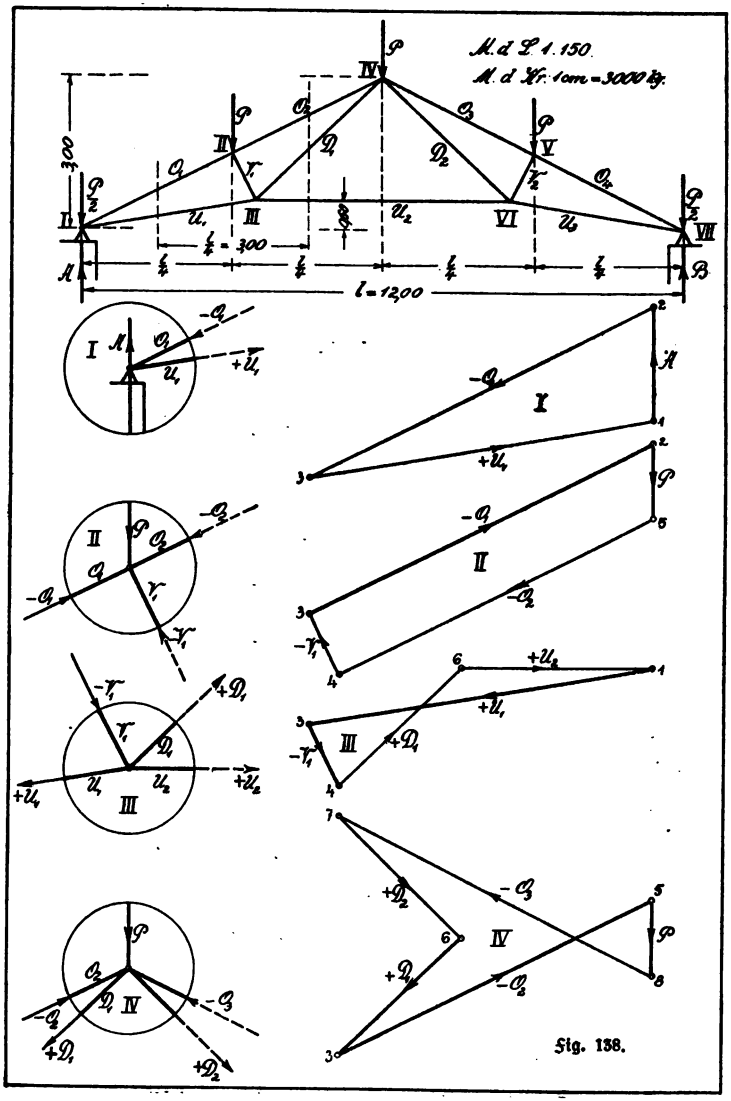

M. d. L. 1:150.
M. d. Kr. 1cm = 3000 kg.
300
l = 12,00
I
II
III
IV
V
VI
VII
A
B
1
2
3
4
5
6
7
8

Fig. 138.

Kräfte V_1 und O_2 ergeben sich daher aus der Bedingung, daß sich ein geschlossenes Krafteck zeichnen läßt. Durch Übertragung der Pfeilrichtungen an die Schnittstellen des Knotenpunktes II ergibt sich, daß in V_1 und in O_2 Druck herrscht. Nunmehr kann man, da V_1 bekannt ist, zu Punkt III übergehen. Für ihn, wie für Punkt IV verfährt man in derselben Weise, was durch die Figur wohl genügend genau veranschaulicht wird.

Man findet, daß sämtliche Stäbe des Obergurtes gedrückt und sämtliche Stäbe des Untergurtes gezogen werden, was bei allen Dächern auf zwei Stützen der Fall ist. Die Vertikalen V erleiden Druck-, die Diagonalen D Zugspannungen. Die Spannungen werden nach dem gewählten Kräftemaßstabe gemessen und am besten in einer Tabelle zusammengestellt. Für vorliegenden Fall erhält man:

Stab	Zug kg	Druck kg	Stab	Zug kg	Druck kg
O_1		— 15270	O_3		— 15270
O_2		— 13920	O_4		— 13920
U_1	+ 13800		U_3	+ 13800	
U_2	+ 7590				
V_1		— 2670	V_2		— 2670
D_1	+ 6750		D_2	+ 6750	

Infolge der symmetrischen Anordnung entstehen, wie die Tabelle zeigt, natürlich in der rechten Binderhälfte dieselben Spannungen, wie in der linken.

Schiebt man die Kraftecke der Fig. 138 sämtlich so zusammen, daß z. B. O_1 im Krafteck I mit O_1 im Krafteck II, U_1 im Krafteck III mit U_1 im Krafteck I, O_2 im Krafteck IV mit O_2 im Krafteck II zusammenfällt, und zeichnet auch die Spannkräfte für die rechte Binderhälfte, so entsteht eine in sich geschlossene Figur, welche Cremonaplan genannt wird und infolge der Symmetrie der ganzen Anordnung gleichfalls symmetrisch wird (Fig. 139). Man benutzt bei der Zeichnung eines solchen

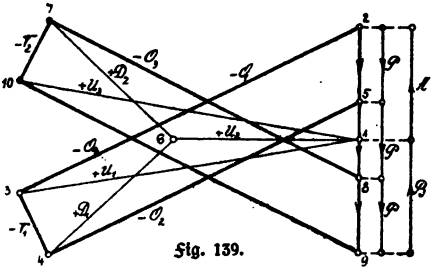


Fig. 139.

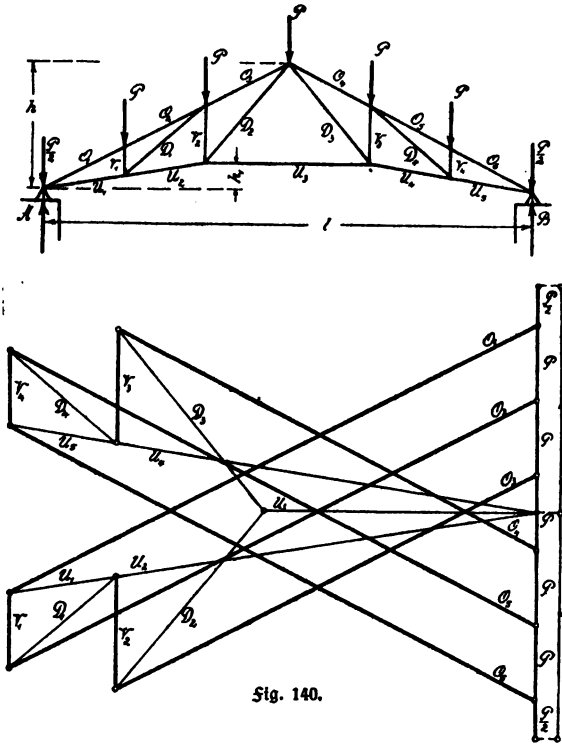


Fig. 140.

Planes also die eben gefundenen Spannkräfte, ohne erstere nochmals zu zeichnen, wie dies in Fig. 138 geschehen war. In Fig. 139 sind die Druckspannungen durch stärkere Linien von den Zugspannungen unterschieden. Einer weiteren Erklärung bedarf die Figur wohl nicht. Wegen ihrer Einfachheit und Übersichtlichkeit sind die Cremonapläne sehr beliebt und werden an Stelle des Verfahrens nach Fig. 138 allgemein angewendet.

Fig. 140 zeigt die Untersuchung eines englischen Dachbinders mit Hilfe eines Cremonaplanes. Der Obergurt wird wieder auf Druck, der Untergurt auf Zug beansprucht, in den Vertikalen V treten Druck-, in den Diagonalen D Zugspannungen auf. Bei der Aneinanderreihung der äußeren Kräfte sind die in den Auflagern angreifenden Kräfte $\frac{P}{2}$ mit aufgetragen. Man erkennt ihren Einfluß auf die Auflagerdrücke A und B, welche sie zum Teil aufheben, so daß auch hier für die Bestimmung der Auflagerdrücke nur die in den Zwischenknotenpunkten angreifenden Kräfte in Betracht kommen. Es wird mithin:

$$A = B = \frac{5}{2} P.$$

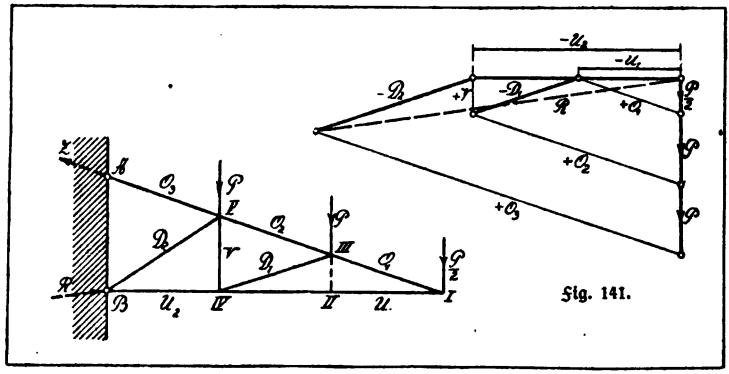


Fig. 141 gibt die Unterſuchung eines als Freiträger ausgebildeten Daches wieder, wie es bei Bahnſteigbedachungen häufig ausgeführt wird. Wie bei jedem Freiträger die obere Zone gezogen, die untere gedrückt wird, ſo treten auch hier — im Gegenſatze zu den Trägern auf zwei Stützen — im Obergurt Zug-, im Untergurt Druckſpannungen auf. In *V* herrſchen Zug-, in den Diagonalen *D* Druckſpannungen. Wollte man noch eine Vertikale II—III (in der Fig. punktiert) anordnen, ſo würde dieſe, wie ſich aus dem Kräfteplan leicht erkennen läßt, ſpannungslos bleiben. Sie iſt alſo überflüſſig.

Einer beſonderen Erläuterung bedarf für dieſen Fall die Ermittelung der in den Befeſtigungspunkten *A* und *B* auftretenden Kräfte. Auf Punkt *B* wirkt die Mittelkraft aus D_2 und U_2 (im Cremonaplan punktiert). Sie ruft die gleich große, entgegengeſetzt wirkende Kraft *R* hervor. Auf den Punkt *A* wirkt die Spannkraft O_3, welche die gleich große, in derſelben Geraden wirkende, aber entgegengeſetzte Kraft *Z* hervorruft.

Die Ermittelung der Stabquerſchnitte, welche die nach dem eben beſchriebenen Verfahren ermittelten Spannkräfte aufzunehmen vermögen, erfolgt mit Hilfe der bekannten Formeln für Zug- bzw. Druckfeſtigkeit, wie das bereits an Beiſpielen gezeigt wurde. Doch hat man zu beachten, daß alle auf Druck beanſpruchten Stäbe auch auf Zerknicken zu berechnen ſind, weil ihr Querſchnitt im Vergleich zu ihrer Länge ſehr gering iſt. Die Länge der Stäbe kann aus der Zeichnung entnommen werden. Man wählt für ſämtliche Obergurtſtäbe denſelben Querſchnitt, welcher dann natürlich nach der größten Druckkraft zu berechnen iſt. Ebenſo nimmt man für ſämtliche aufſteigenden Untergurtſtäbe gleichen Querſchnitt, und ebenſo für ſämtliche Vertikalen, wie auch für ſämtliche Diagonalen. Gehobene Untergurtſtäbe (Fig. 138 und 140) werden beſonders berechnet.

L. Der Erddruck.

I. Allgemeines.

Werden lockere Erdmassen auf einer ebenen Fläche aufgeschüttet, so bilden ihre Seitenflächen, sobald sie zur Ruhe gelangt sind, mit der ebenen Fläche einen Winkel, welchen man den natürlichen Böschungswinkel nennt. Dieser ist natürlich für die verschiedenen Erdmassen auch verschieden groß und kann aus Tabellen entnommen werden. Nach dem, was auf S. 117 über die Reibung kurz gesagt wurde, ist ohne weiteres einzusehen, daß der natürliche Böschungswinkel gleich dem Reibungswinkel ist.

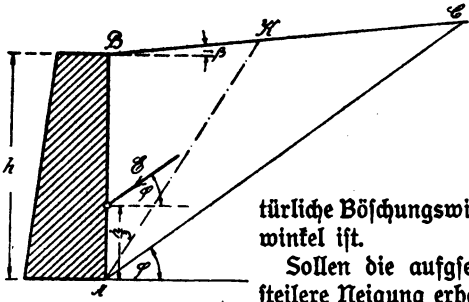


Fig. 142.

Sollen die aufgeschütteten Erdmassen eine steilere Neigung erhalten, so müssen sie durch eine Wand gestützt werden, welche alsdann durch die Erde einen Druck erleidet, der Erddruck genannt wird und für die Stärke der Wand mitbestimmend ist. Ohne weiteres erkennt man, daß der Erddruck mit der Tiefe zunimmt.

Denkt man sich die Mauer von der Anschüttung etwas abgerückt, (Fig. 142), so wird nicht der ganze oberhalb der natürlichen Böschungslinie AC liegende Erdkörper ABC zum Abgleiten gelangen, sondern nur ein Teil desselben, ABK, während der übrige Teil infolge der Reibung festgehalten wird. Die durch die Linie AK bestimmte Fläche heißt Gleitfläche. Auch wirkt der Erddruck nicht senkrecht zur Wand, sondern er schließt mit der in seinem Angriffspunkt errichteten Senkrechten einen Winkel ein, welcher gleich dem Reibungswinkel zwischen Erde und Mauerwerk ist. Da die Rückwand der Mauer gewöhnlich rauh ist, macht man häufig — wie es auch hier weiterhin geschehen soll — die vereinfachende Annahme, daß der Reibungswinkel zwischen Erde und Mauerwerk gleich dem natürlichen Böschungswinkel ist (Fig. 142).

II. Die Ermittelung der Größe des Erddruckes.

Am einfachsten wird die Größe des Erddruckes auf zeichnerischem Wege nach dem Rebhannschen Verfahren ermittelt, welches in Fig. 143 u. f. dargestellt ist.

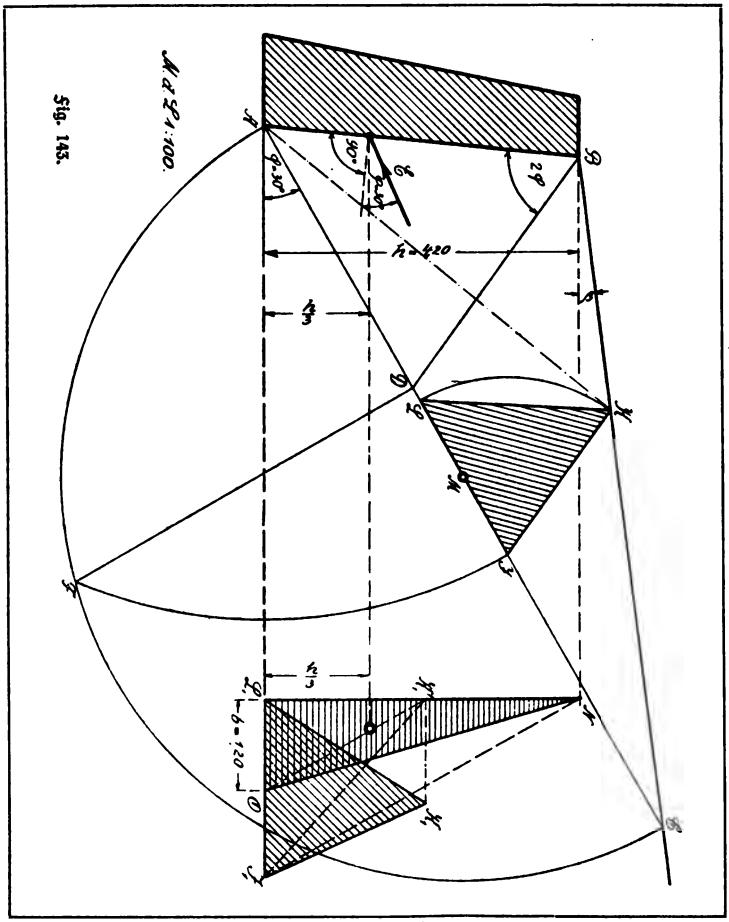


Fig. 143.

1. Das Gelände steige unter einem Winkel β von der Oberkante der Mauer an. Man bringt die natürliche Böschungslinie AC zum Schnitt mit der Geländelinie BC, trägt an die Rückwand der Mauer den $\sphericalangle 2\varphi$ (bzw. die Summe aus natürlichem Böschungswinkel und Reibungswinkel zwischen Erde und Mauerwerk, wenn diese beiden Winkel verschieden angenommen werden) an und erhält so den Punkt

D auf der natürlichen Böschungslinie. Nun schlägt man über AC einen Halbkreis, errichtet in D ein Lot, welches den Halbkreis im Punkte F schneidet, und überträgt F von A aus durch Zirkelschlag nach I auf der natürlichen Böschungslinie. Hierauf zieht man $IK \parallel BD$, schlägt den Bogen KL und verbindet K mit L. Das Dreieck IKL gibt die Größe des Erddruckprismas für 1 m Tiefe. Um die Verteilung des Erddruckes auf die Rückwand der Mauer und seinen Angriffspunkt zu bestimmen, trägt man $\Delta I_1 K_1 L_1 \cong \Delta IKL$ auf, zieht $K_1 K_1' \parallel I_1 L_1$ und verwandelt so zunächst das $\Delta I_1 K_1 L_1$ in das inhaltsgleiche $\Delta I_1 K_1' L_1$. Hierauf zieht man $I_1 N$, ferner $K_1' O \parallel I_1 N$ und verbindet N mit O. Dann ist nach einer einfachen Verwandlungsaufgabe aus der Planimetrie das $\Delta L_1 ON = \Delta I_1 K_1 L_1$ und stellt somit gleichfalls die Größe des Erddruckes für 1 m Tiefe dar. Den Schwerpunkt dieses Dreiecks, welcher $\frac{1}{3}$ h über der Bodenfläche liegt, überträgt man nach der Rückwand der Mauer, errichtet in dem so gefundenen Punkte ein Lot und trägt an dieses unter dem $\sphericalangle \varphi$ die Richtungslinie des Erddruckes an, welcher somit vollständig bestimmt ist. Da in Fig. 143 die Höhe der Mauer 4,20 m ist, und in dem Erddruckdreieck $L_1 ON$ die Grundlinie $L_1 O = 1{,}20$ m mißt, so ist bei einem Erdgewichte von 1600 kg/cbm der Erddruck für 1 m Tiefe:

$$E = \frac{1{,}20 \cdot 4{,}20}{2} \cdot 1600 = 4032 \text{ kg}.$$

Wird $\sphericalangle \beta = 0$, so ist das Gelände wagerecht. Die Konstruktion bleibt dieselbe.

2. Das Gelände steige unter dem natürlichen Böschungswinkel φ oberhalb der Mauer an. AC und BC können nicht zum Schnitt gebracht werden, weil sie gleichlaufend sind. Man zieht von einem auf der natürlichen Böschungslinie beliebig angenommenen Punkte I eine Gleichlaufende zu der unter dem $\sphericalangle 2\varphi$ an die Rückwand der Mauer angetragenen Geraden BD und überträgt den Punkt K nach L, so daß $IL = IK$. ΔIKL ist das die Größe des Erddruckes für 1 m

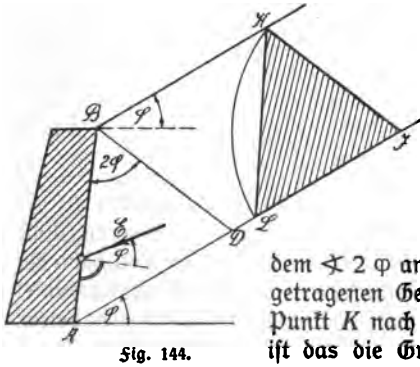


Fig. 144.

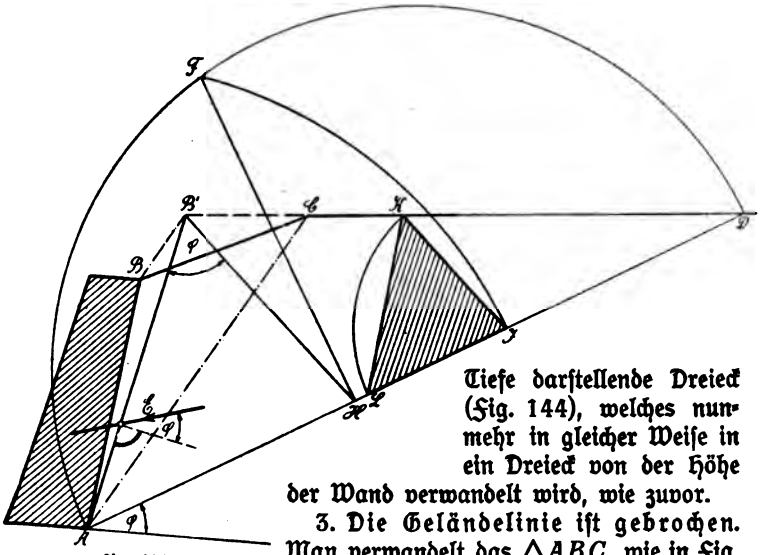


Fig. 145.

Tiefe darstellende Dreieck (Fig. 144), welches nunmehr in gleicher Weise in ein Dreieck von der Höhe der Wand verwandelt wird, wie zuvor.

3. Die Geländelinie ist gebrochen. Man verwandelt das ΔABC, wie in Fig. 145 angegeben, in ein gleichgroßes $\Delta AB'C$ so, daß $B'C$ die gerade Verlängerung von CD bildet. AB' wird nun als Hinterwand der Mauer betrachtet und hierfür das Erddruckdreieck IKL in bekannter Weise konstruiert. Die Verwandlung in ein Dreieck von der Höhe der neugebildeten Rückwand ist dieselbe wie zuvor.

4. Die obere Begrenzung der Mauer hat eine Auflast. Die Auflast oder Verkehrslast von q kg/qcm wird genau, wie wir schon bei den Gewölben sahen, in das Gewicht eines Erdkörpers umgewandelt und die Höhe dieses Erdkörpers, der ebenso viel wiegt, wie die Auflast, bestimmt. Ist γ_e das Gewicht von 1 cbm Erde in kg, so ist die gesuchte Höhe:

$$h_1 = \frac{q}{\gamma_e}.$$

Die weitere Untersuchung erfolgt für eine Höhe $h + h_1$, worin h die Höhe der Mauer bedeutet. Das Beispiel am Schlusse des nächsten Abschnittes zeigt eine derartige Aufgabe.

M. Der Wasserdruck.

I. Wasserdruck bei lotrechter Rückwand.

Aus der Naturlehre ist allgemein bekannt, daß der Druck auf die Seitenflächen eines Behälters gleich ist dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche die gedrückte Fläche zur Grundfläche und den Abstand ihres Schwerpunktes vom Flüssigkeitsspiegel zur Höhe hat. Die Richtung des Wasserdruckes ist stets senkrecht zur gedrückten Fläche.

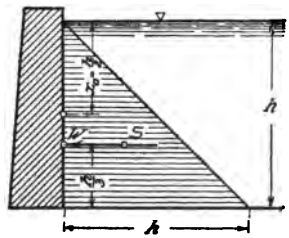


Fig. 146.

Ist x_o der Abstand des Schwerpunktes der gedrückten Fläche (etwa der Rückwand einer Wassermauer), F deren Inhalt und γ_w die Gewichtseinheit des Wassers, so ist daher der Wasserdruck (Fig. 146):

$$W = \gamma_w \cdot F \cdot x_o.$$

Legt man eine Tiefe von 1,0 m der Untersuchung zu Grunde und ist die Rückwand der Mauer von der Höhe h senkrecht, so wird:

$$F = 1{,}0 \cdot h = h$$

$$x_o = \frac{h}{2} \quad \text{folglich:} \quad W = \gamma \frac{h^2}{2}. \tag{33}$$

$\frac{h^2}{2}$ stellt den Inhalt eines gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreiecks von der Grundlinie h und Höhe h dar, so daß sich also der Wasserdruck durch ein solches Dreieck darstellen läßt. Der Wasserdruck geht natürlich durch den Schwerpunkt dieses Dreiecks, greift also die Rückwand der Mauer in $^1/_3$ ihrer Höhe über dem Boden an (Fig. 146).

II. Wasserdruck bei geneigter Rückwand.

Nach dem oben Gesagten wird (Fig. 147):

$$W = \gamma_w \cdot F \cdot x_o.$$

Da hier für 1 m Tiefe:

$$F = 1{,}0 \cdot h_1 = h_1 \quad \text{und:} \quad x_o = \frac{h}{2},$$

so folgt: $$W = \gamma_w \cdot \frac{h_1 \cdot h}{2}. \tag{34}$$

Auch hier läßt sich also der Wasserdruck durch ein rechtwinkeliges Δ vom Inhalte $\frac{h_1 \cdot h}{2}$ darstellen, wie dies Abb. 147 zeigt. W greift wieder in $\frac{h}{3}$ über dem Boden an, ist aber senkrecht zur Rückwand gerichtet.

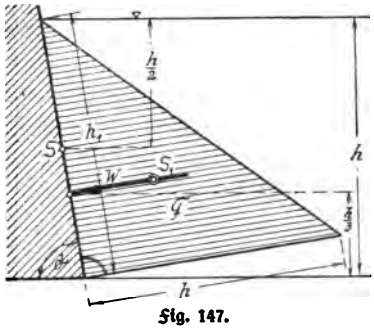


Fig. 147.

Bezeichnet α den Neigungswinkel der Rückwand zur Wagerechten, so ist:

$$\frac{h}{h_1} = \sin\alpha, \quad \text{also: } h_1 = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

Dann erhält man an Stelle von Gleichung (34):

$$W = \frac{\gamma_w \cdot h^2}{2 \sin\alpha}. \tag{35}$$

III. Wasserdruck bei gebrochener Rückwand.

Die Bestimmung des Wasserdruckes erfolgt hier für einen etwa vorhandenen geraden Teil (Fig. 148) nach dem unter I. beschriebenen Verfahren. Für den geneigten Teil (häufig hat man auch eine mehrfach gebrochene Rückwand) wird der Wasserdruck nach dem unter II. Gesagten bestimmt, in dem man die Neigung der Rückwand bis zum Schnittpunkt mit der Wasserspiegellinie verlängert. Von dem gewonnenen Dreieck ADE ist der obere Teil BDF in Abzug zu bringen. Das verbleibende Trapez $ABFE$ gibt die Größe des Wasserdruckes W_2 für 1 m Tiefe auf den geneigten Teil AB der Rückwand an. Der Wasserdruck W_2 geht durch den Schwerpunkt des Trapezes und ist senkrecht zur geneigten Fläche AB gerichtet.

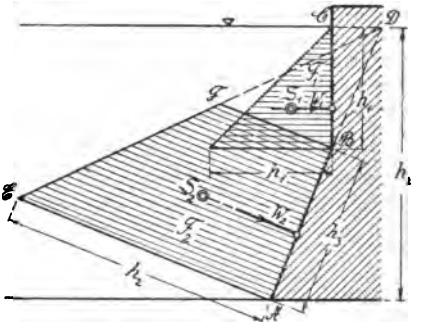


Fig. 148.

IV. Beispiel.

Die in Fig. 149 gegebene Wassermauer ist auf ihre Standsicherheit hin zu untersuchen. Die Mauer hat eine Auflast von 800 kg/qm aufzunehmen, 1 cbm Mauerwerk wiege 2000 kg, 1 cbm Erde 1600 kg.

Zur Bestimmung des Erddruckes wird die Mauer in zwei Abschnitte AB und AA' zerlegt. Das Gewicht der Auflast wird in Erdgewicht umgerechnet. Die Höhe, welche ein Erdkörper vom gleichen Gewichte wie die Auflast haben müßte, folgt aus:

$$h_1 = \frac{q}{\gamma_e} = \frac{800}{1600} = 0{,}50 \text{ m}.$$

Diese Höhe wird oberhalb der Mauer aufgetragen und die Linie CD als Geländelinie betrachtet. Sodann ermittelt man für den lotrechten Teil der Rückwand, und zwar von der Höhe AC (also nicht von der Höhe AB) den Erddruck in bekannter Weise. Dabei ergibt sich das Druckdreieck IKL. Nunmehr ist der Erddruck für den unteren unterschnittenen Teil der Mauer AA' zu bestimmen. Man verlängert zu diesem Zwecke AA' bis zum Schnittpunkt C' mit CD und betrachtet AC' als Rückwand, für welche das Druckdreieck $I'K'L'$ in gleicher Weise wie sonst gefunden wird. Die beiden Erddruckdreiecke werden nun in Dreiecke von der Höhe des senkrechten Teiles AC, bzw. der geneigten Wand $A'C'$ verwandelt, wie die Figur zeigt. Um den Druck auf den unterschnittenen Teil der Wand zu erhalten, hat man den Druck auf den oberen senkrechten Teil der Wand von dem ganzen, durch das größere Dreieck veranschaulichten Druck abzuziehen. Demnach stellt das Trapez $I'MNI$ den Erddruck auf den unterschnittenen Teil $A'A$ dar. Der Schwerpunkt des Trapezes wird nach $A'A$ gelotet, in den so erhaltenen Angriffspunkt eine Senkrechte auf $A'A$ errichtet und an diese die Richtung des Erddruckes E_2 unter dem Reibungswinkel (hier $= 35^0$) angetragen.

Da vor der Auflast keine Mauer vorhanden ist, so ist das kleine $\Delta\, OPQ$ von dem den oberen Erddruck E_1 darstellenden Dreieck $IK'Q$ in Abzug zu bringen, so daß E_1 durch das Trapez $IK'PO$ veranschaulicht wird. Die Bestimmung des Angriffspunktes mit Hilfe des Schwerpunktes dieses Trapezes und die Festlegung der Richtung des Erddruckes erfolgen in gleicher Weise, wie eben beschrieben.

Der Mauerkörper selbst wird in zwei, durch den Punkt A bestimmte Teile zerlegt, so daß man die in den Schwerpunkten der beiden sich ergebenden Trapeze wirkenden Gewichte G_1 und G_2 erhält.

Der Wasserdruck W wird in der unter II. beschriebenen Weise ermittelt.

Mit Hilfe der gegebenen, bzw. durch Zeichnung gefundenen Maße erhält man sodann:

$$G_1 = \frac{1{,}60 + 2{,}50}{2} \cdot 4{,}80 \cdot 2000 = 19680 \text{ kg}$$

$$G_2 = \frac{2{,}71 + 3{,}20}{2} \cdot 2{,}46 \cdot 2000 = 14540 \text{ kg}$$

Fig. 119.

$$E_1 = \frac{1{,}31 + 0{,}15}{2} \cdot 4{,}80 \cdot 1600 = 5610 \text{ kg}$$

$$E_2 = \frac{1{,}47 + 0{,}91}{2} \cdot 3{,}15 \cdot 1600 = 6000 \text{ kg}$$

$$W = \frac{3{,}50 \cdot 3{,}56}{2} \cdot 1000 = 6230 \text{ kg}.$$

Nachdem nunmehr die äußeren Kräfte ermittelt sind, kann zu deren Zusammensetzung geschritten werden. Diese ist hier derart vorgenommen, daß E_1 und G_1 zu R_1, R_1 und G_2 zu R_2, R_2 und E_2 zu R_3, und R_3 und W zu R_4 vereinigt wurde.

Die Mittelkraft sämtlicher Kräfte, R_4, greift im Abstande $e = 35$ cm vom Mittelpunkt der 2,46 m langen Bodenfuge $A'F$ an. Da:

$$\frac{b}{6} = \frac{2{,}46}{6} = 0{,}41 \text{ m},$$

so liegt die Mittelkraft noch im Kerne der Fuge; die Mauer ist also gegen Kanten gesichert. Die senkrechte Seitenkraft von R_4, welche man durch Zeichnung findet:

$$V_4 = 41200 \text{ kg},$$

schließt mit R_4 einen $\sphericalangle 5°40'$ ein, welcher auch unterhalb der zulässigen Grenze liegt, so daß ein Gleiten der Mauer ausgeschlossen ist.

Die Bodenpressungen ergeben sich aus:

$$k = \frac{V}{F} \cdot \left(1 \pm \frac{6e}{b}\right),$$

und da ein Mauerstreifen von 1,0 m Tiefe untersucht wurde, so wird:

$$k = \frac{41200}{246 \cdot 100} \cdot \left(1 \pm \frac{6 \cdot 35}{246}\right) = 1{,}67 \cdot (1 \pm 0{,}85)$$

also: $k_{max} = 1{,}67 \cdot 1{,}85 = 3{,}1$ kg/qcm

$k_{min} = 1{,}67 \cdot 0{,}15 = 0{,}25$ kg/qcm.

Läßt man eine Bodenpressung von 3 bis 4 kg/qcm zu, so überschreitet k_{max} die zulässige Grenze nicht. Bei geringerer zulässiger Bodenbeanspruchung müßte jedoch die Fuge verbreitert werden.

Die Mauer muß aber auch dann standsicher sein, wenn der Wasserdruck nicht wirkt (z. B. bei Abdämmung infolge Ausbesserungsarbeiten). In diesem Falle kommt für die Untersuchung der untersten Fuge die Mittelkraft R_3 und ihre Seitenkraft V_3 in Betracht. Endlich muß die Mauer auch ohne Wasserdruck und Erddruck standsicher sein (vor der Hinterfüllung). Dann hat man für die Untersuchung der Fuge $A'F$ die Mittelkraft G_{1-2} aus G_1 und G_2 und deren lotrechte Seitenkraft V_g zu benutzen. Die Untersuchung erfolgt in gleicher Weise, wie eben beschrieben.

Die elementare Mechanik. Von Prof. Dr. G. Hamel. Ein Lehrbuch enthaltend: Eine Begründung der allgemeinen Mechanik; die Mechanik der Systeme starrer Körper; die synthetischen und die Elemente der analytischen Methoden sowie eine Einführung in die Prinzipien der Mechanik deformierbarer Systeme. Mit 265 Figuren. Geh. M. 16.—, in Leinwand geb. M. 18.—

Die technische Mechanik. Von Reg.-Baumeister Diplom-Ing. P. Stephan. I. Teil: Mechanik starrer Körper. Mit 255 Fig. im Text. Geh. M. 5.—, geb. M. 7.— II. Teil: Festigkeitslehre, Mechanik flüssiger und gasförmiger Körper. Mit 200 Figuren im Text. Geh. M. 5.—, geb. M. 7.—

Vorlesungen über technische Mechanik. Von Prof. Dr. Aug. Föppl. Mit zahlreichen Figuren. 6 Bände. In Leinw. geb.

Bd. I: **Einführung in die Mechanik.** 4. Auflage. M. 10.—
Bd. II: **Graphische Statik.** 3. Auflage. M. 8.—
Bd. III: **Festigkeitslehre.** 5. Auflage. M. 12.—
Bd. IV: **Dynamik.** 4., veränderte Auflage. M. 12.—
Bd. V: **Elastizitätstheorie.** M. 10.—
Bd. VI: **Höhere Dynamik.** M. 12.—

Die Theorie der Kräftepläne. Eine Einführung in die graphische Statik. Von Prof. Dr. H. E. Timerding. Mit 46 Figuren. Geh. M. 2.60, in Leinwand geb. M. 3.—

Geometrie der Kräfte. Von Prof. Dr. H. E. Timerding. Mit 27 Figuren. In Leinwand geb. M. 16.—

Leitfaden der Statik. Von Regierungsbaumeister Direktor A. Schau. In 3 Teilen.

Teil I: **Grundgesetze.** Anwendungen der statischen Gesetze auf Trägerordnung. Einfache Stabkonstruktionen und ebene Fachwerkträger. Mit 77 Figuren. 128 Seiten. Steif geh. M. 2.40.

Teil II: **Festigkeitslehre.** Zug- und Druckfestigkeit, Schubfestigkeit. Biegungsfestigkeit und Knickfestigkeit. Mit 205 Figuren. 163 Seiten. Steif geh. M. 3.—

Teil III: **Hochbau.** (In Vorbereitung.)

Die graphische Statik der starren Systeme. Von Geh. Hofrat Prof. Dr. L. Henneberg. Mit 394 Fig. im Text. In Leinw. geb. M. 24.—

Technische Statik. Vorlesungen über die Theorie der Tragkonstruktionen. Von Professor Dr. A. Ostenfeld. Deutsch von D. Skooge. Mit 336 Figuren auf 33 Tafeln. Geb. M. 12.—.

Statik der Raumfachwerke. Von Dipl.-Ing. Prof. Dr. W. Schlink. Mit 214 Figuren und 2 Tafeln. In Leinwand geb. M. 9.—.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Mathematische und technische Tabellen. Von Prof. M. Girndt und Oberingenieur a. D. A. Liebmann. Mit 58 Figuren. In Leinwand geb. M. 2.30.

Kontinuierliche Träger auf drei und vier Stützen. Für Schule und Praxis. Bearb. von Dr.-Ing. H. Nitzsche. Mit 17 Fig. Steif geh. M. 1.20.

Grundbau. Von Ing. Prof. M. Benzel. Mit 228 Abbildungen. In Leinwand geb. M. 4.10.

Baukunde für Maschinentechniker. Von Direktor Dr.-Ing. A. Weiske. Mit 168 Figuren. Steif geh. M. 1.20.

Baukonstruktionslehre. Von Kgl. Oberlehrer O. Frick und Kommiss.-Direktor K. Knöll. Mit 481 Abb. In Leinw. geb. M. 6.80.

Eisenkonstruktion. Von Prof. Dipl.-Ing. A. Göbel. 2. Auflage bearbeitet von O. Henkel. Mit 451 Abb. In Leinwand geb. M. 4.90.

Die Konstruktion von Hochbauten. Von Oberlehrer Otto Frick und Prof. Karl Knöll. 3. Auflage mit 486 Figuren. In Leinwand geb. M. 6.80.

Das Veranschlagen von Hochbauten. Von Architekt Georg Blume. 3., vermehrte Auflage mit 3 Tafeln und 17 Abbildungen. In Leinwand geb. M. 2.50.

Grundzüge des Eisenhochbaues. Von Dipl.-Ingenieur Prof. Aug. Göbel u. Dipl.-Ingenieur O. Henkel. Mit 503 Abbildungen. In Leinwand geb. M. 4.90.

Der städtische Tiefbau. Von Reg.- und Gewerbeschulrat Prof. R. Gürschner und Prof. M. Benzel. 2. Aufl. mit 406 Abb., 6 mehrfarb. Plänen, 6 graph. u. 5 Zahlentabellen. In Leinw. geb. M. 10.60.

Die Kalkulation von Tief- und Ingenieurbauten. Von Architekt Georg Blume und Dr. Viktor Hortig. Mit 13 Tafeln und 7 Abb. In Leinwand geb. M. 4.50.

Der Brückenbau. Von Reg.-Baumeister A. Schau. Mit 725 Abbildungen und 6 Tafeln. In Leinwand geb. M. 9.40.

Die Kalkulation im Maurerhandwerk. Von Architekt A. J. Beck. Kart. M. —.75 — **im Dachdeckerhandwerk**, kart. M. 1.— — **im Klempnerhandwerk**, kart. ca. M. 1.80 — **im Installateurhandwerk**, kart. ca. M. 2.—

Wie ein Haus entsteht. Bearbeitet von Architekt O. Schmidt. Mit 1 Bauplan und 26 Textabbildungen. Steif geh. M. 1.50.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Aus Natur und Geisteswelt

Jeder Band geheftet Mark 1.—, in Leinwand gebunden Mark 1.25

Praktische Mathematik. Von Dr. R. Neuendorff.

I. Teil: Graphisches und numerisches Rechnen, kaufmänn. Rechnen im täglichen Leben, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit 1 Tafel und 69 Fig. (Bd. 341.)

II. Teil: Geometrie, Konstruktionen, Perspektive, Ort-, Zeit- und Entfernungsberechnungen. (Bd. 526.)

Differential- und Integralrechnung. Von Dr. M. Lindow. Mit 42 Figuren. (Bd. 387.)

Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von Prof. Dr. G. Kowalewski. Mit 18 Figuren. 2. Auflage. (Bd. 197.)

Stereometrie. Von Direktor Dr. P. Zühlke. (Bd. 532.)

Trigonometrie der Ebene zum Selbstunterricht. Von Prof. P. Crantz. Mit 50 Figuren. (Bd. 431.)

Mechanik. Von Kaiserl. Geh. Reg.-Rat A. v. Ihering.

Bd. I: Die Mechanik der festen Körper. Mit 61 Abbildungen. (Bd. 303.)
„ II: Die Mechanik der flüssigen Körper. Mit 34 Abbildungen. (Bd. 304.)
„ III: Die Mechanik der gasförmigen Körper. (Bd. 305.)

Einführung in die technische Wärmelehre. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. (Bd. 516.)

Einleitung in die Experimentalphysik. Von Geh. Regierungsrat Prof. Dr. R. Börnstein. Mit 90 Abb. (Bd. 371.)

Die Lehre von der Energie. Von Oberlehrer Dr. A. Stein. Mit 13 Figuren. 2. Auflage. (Bd. 257.)

Das Perpetuum mobile. Von Dr. F. Ichak-Rubiner. Mit 38 Abbildungen. (Bd. 462.)

Der Werdegang der modernen Physik. Von Dr. H. Keller. Mit 13 Figuren. (Bd. 343.)

Einführung in die chemische Wissenschaft. Von Prof. Dr. W. Loeb. Mit 16 Figuren. (Bd. 264.)

Einführung in die organische Chemie. Natürliche u. künstliche Pflanzen- u. Tierstoffe. Von Oberl. Dr. B. Bavink. Mit 7 Fig. (Bd. 187.)

Der Eisenbetonbau. Von Dipl.-Ing. Em. Haimovici. Mit 81 Abbildungen. (Bd. 275.)

Hebezeuge. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. Mit 67 Abb. (Bd. 196.)

Das Eisenbahnwesen. Von Eisenbahnbau- u. Betriebsinspektor a. D. E. Biedermann. Mit 56 Abbildungen. 2. Aufl. (Bd. 144.)

Wasserkraftmaschinen und die Ausnützung der Wasserkräfte. Von Geh. Reg.-Rat A. v. Ihering. Mit 73 Figuren. 2. Aufl. (Bd. 228.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Aus Natur und Geisteswelt

Jeder Band geheftet Mark 1.—, in Leinwand gebunden Mark 1.25

Industrielle Feuerungsanlagen und Dampfkessel. Von Ing. J. E. Mayer. Mit 88 Abbildungen. (Bd. 348.)

Die Dampfmaschine. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater.
I. Wirkungsweise des Dampfes in Kessel und Maschine. Mit 45 Abb. 3. Aufl. (Bd. 393.)
II. Ihre Gestaltung und Verwendung. Mit 95 Abb. und 1 Tafel. (Bd. 394.)

Die neueren Wärmekraftmaschinen. Von Geh. Bergrat R. Vater.
I. Einführung in Theorie und Bau. Mit 42 Abb. 4. Aufl. (Bd. 21.)
II. Gasmaschinen, Gas- und Dampfturbinen. Mit 45 Abb. 3. Aufl. (Bd. 86.)

Grundlagen der Elektrotechnik. Von Obering. Dr. A. Rotth. Mit 72 Abbildungen. (Bd. 391.)

Die elektrische Kraftübertragung. Von Ingenieur P. Köhn. Mit 137 Abbildungen. (Bd. 424.)

Das Holz, seine Bearbeitung und Verwendung. Von Leiter der technolog. Kurse f. Holzbearbeitg. in München J. Großmann. (Bd. 473.)

Die Metalle. Von Prof. Dr. K. Scheid. Mit 11 Abb. 3. Aufl. (Bd. 29.)

Eisenhüttenwesen. Von weil. Geh. Bergrat Prof. Dr. H. Wedding. 4. Aufl. von Bergref. F. W. Wedding. Mit 15 Figuren. (Bd. 20.)

Weberei. Von Direktor Prof. Paur. (Bd. 468.)

Spinnerei. Von Dir. Prof. M. Lehmann. Mit 35 Abb. (Bd. 388.)

Die chemische Technik. Von Dr. A. Müller. Bd. I. Mit 24 Abb. (Bd. 191.)

Farben und Farbstoffe. Ihre Erzeugung und Verwendung. Von Dr. A. Zart. Mit 31 Abbildungen. (Bd. 483.)

Der Weg zur Zeichenkunst. Ein Büchlein für theoretische u. praktische Selbstbildung. Von Dr. E. Weber. Mit 82 Abb. u. 1 Farbtafel. (Bd. 430.)

Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. Von Prof. Dr. K. Doehlemann. Mit Abb. (Bd. 510.)

Am sausenden Webstuhl der Zeit. Die Wirkungen der Naturwissenschaft und Technik auf das gesamte Kulturleben. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. W. Launhardt. 3. Aufl. Mit 16 Abb. (Bd. 23.)

Bilder aus der Ingenieurtechnik. Von Baurat K. Merkel. Mit 43 Abbildungen. (Bd. 60.)

Schöpfungen der Ingenieurtechnik der Neuzeit. Von Geh. Regierungsrat M. Geitel. Mit 32 Abbildungen. (Bd. 28.)

Die Luftfahrt, ihre wissenschaftlichen Grundlagen und ihre technische Entwicklung. Von Dr. R. Nimführ. 3. Aufl. Mit 60 Abb. (Bd. 300.)

Das Kriegsschiff. V. Geh. Marinebaurat Krieger. M. 60 Abb. (Bd. 389.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Aus Natur und Geisteswelt

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen aus allen Gebieten des Wissens

Jeder Band ist einzeln käuflich

Kartoniert M. 1.60,*)
gebunden M. 1.90*)

Verlag B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Verzeichnis der bisher erschienenen Bände innerhalb der Wissenschaften alphabetisch geordnet
Werke, die mehrere Bände umfassen, auch in einem Band gebunden erhältlich

I. Religion, Philosophie und Psychologie.

Ästhetik. Von Prof. Dr. R. Hamann. 2. Aufl. (Bd. 345.)
— **Einführung in die Geschichte der Ä.** Von Dr. H. Nohl. (Bd. 602.)
Astrologie siehe Sternglaube.
Aufgaben u. Ziele d. Menschenlebens. Von Prof. Dr. J. Unold. 5. Aufl. (Bd. 12.)
Bergpredigt, Die. Von Prof. D. Dr. H. Weinel. (Bd. 710.)
Bergson, Henri, der Philosoph moderner Relig. Von Pfarrer Dr. E. Ott. (Bd. 480.)
Berkeley siehe Locke, Berkeley, Hume.
Buddha. Leben u. Lehre d. B. V. Prof. Dr. R. Pischel. 3. A., durchges. v. Prof. Dr. H. Lüders. M. 1 Tb. u. 1 T. (109.)
Calvin, Johann. Von Pfarrer Dr. G. Sodeur. Mit 1 Bildnis. 2. Aufl. (Bd. 247.)
Christentum. Aus der Werdezeit des chr. Studien u. Charakteristiken. V. Prof. Dr. J. Geffcken. 2. Aufl. (Bd. 54.)
— **Die Religion des Urchristentums.** Von Prof. D. Dr. H. Windisch. (Bd. 641.)
— **Christentum und Weltgeschichte seit der Reformation.** Von Prof. D. Dr. K. Sell. 2 Bde. (Bd. 297. 298.)
— siehe Jesus, Kirche, Mystik im Christent.
Ethik. Grundzüge d. E. M. bes. Berücksicht. d. päd. Probl. V. E. Wentscher. (397.)
— s. a. Aufg. u. Ziele, Sexualethik, Sittl. Lebensanschauungen, Willensfreiheit.
Freimaurerei, Die. Eine Einführung in ihre Anschauungswelt u. ihre Geschichte. Von Geh. Rat Dr. L. Keller. 2. Aufl. von Geh. Archivrat Dr. G. Schuster. (463.)
Griechische Religion siehe Religion.
Handschriftenbeurteilung. Die. Eine Einführung in die Psychol. d. Handschrift. Von Prof. Dr. G. Schneidemühl. 2. durchges. u. erw. Aufl. Mit 51 Handschriftennachbild. i. T. u. 1 Taf. (Bd. 14.)
Hei[illegible]ntum siehe Mystik.
Hel[illegible]nistische Religion siehe Religion.
He[illegible]arts Lehren und Leben. Von Pastor [illegible] Flügel. 2. Aufl. Mit 1 Bildnis [illegible]barts. (Bd. 164.)
Hume siehe Locke, Berkeley, Hume.
Hypnotismus und Suggestion. Von Dr. E. Trömner. 3. Aufl. (Bd. 199.)
Jesuiten, Die. Eine histor. Skizze. Von Prof. Dr. H. Boehmer. 4. Aufl. (Bd. 49.)
Jesus. Wahrheit und Dichtung im Leben Jesu. Von Kirchenrat Pfarrer D. Dr. P. Mehlhorn. 2. Aufl. (Bd. 187.)
— **Die Gleichnisse Jesu. Zugleich Anleitung zum quellenmäßigen Verständnis der Evangelien.** Von Prof. D. Dr. H. Weinel. 4. Aufl. (Bd. 46.)
— s. auch Bergpredigt.
Israelitische Religion siehe Religion.
Kant, Immanuel. Darstellung und Würdigung. Von Prof. Dr. O. Külpe. 4. Aufl. hrsg. v. Prof. Dr. A. Messer. Mit 1 Bildnis Kants. (Bd. 146.)
Kirche. Geschichte der christlichen Kirche. Von Prof. Dr. H. Frhr. v. Soden: I. Die Entstehung der christlichen Kirche. (Bd. 690.) II. Vom Urchristentum zum Katholizismus. (Bd. 691.)
— siehe auch Staat und Kirche.
Kriminalpsychologie s. Psychologie d. Verbrechers, Handschriftenbeurteilung.
Kulturreligionen. s. Religion.
Leben. Das L. nach dem Tode i. Glauben der Menschheit. Von Prof. Dr. C. Clemen. (Bd. 506.)
Lebensanschauungen siehe Sittliche L.
Leib und Seele. Von Dr. phil. et med. G. Sommer. (Bd. 702.)
Locke, Berkeley, Hume. Die großen engl. Philos. Von Oberlehrer Dr. P. Thormeyer. (Bd. 481.)
Logik. Grundriß d. L. Von Dr. K. J. Grau. (Bd. 637.)
Luther. Martin L. u. d. deutsche Reformation. Von Prof. Dr. W. Köhler. 2. Aufl. Mit 1 Bildnis Luthers. (Bd. 515.)
— s. auch Von L. zu Bismarck Abt. IV.
Mechanik d. Geisteslebens, Die. V. Geh. Medizinalrat Direktor Prof. Dr. M. Verworn. 4. A. M. 19 Abb. (Bd. 200.)

*) Hierzu Teuerungszuschläge des Verlags und der Buchhandlungen.

. .9. 400 T.

Mission. Die evangelische. Geschichte. Arbeitsweise. Heutiger Stand. V. Pastor E. Baudert. (Bd. 406.)
Mystik in Heidentum u. Christentum. V. Prof. Dr. Edv. Lehmann. 2. Aufl. V. Verf. durchges. Übersetz. v. Anna Grundtvig geb. Quittenbaum. (Bd. 217.)
Mythologie, Germanische. Von Prof. Dr. J. von Negelein. 3. Aufl. (Bd. 95.)
Naturphilosophie. Die moderne. V. Priv.-Doz. Dr. J. M. Verweyen. 2. A. (191.)
Palästina und seine Geschichte. Von Prof. Dr. H. Frh. v. Soden. 4. Aufl. Mit 1 Plan von Jerusalem und 3 Ansichten des Heiligen Landes. (Bd. 6.)
— V. u. s. Kultur in 5 Jahrtausenden. Nach d. neuest. Ausgrabgn. u. Forschgn. dargest. von Prof. Dr. H. Thomsen. 2., neubearb Aufl. M. 37 Abb. (260.)
Paulus, Der Apostel, u. sein Werk. Von Prof Dr. E Vischer. (Bd. 309)
Philosophie. Die. Einführ. i. d. Wissensch., ihr Wes. u. ihre Probleme. Von Oberrealschuldir. H. Richert. 3. Afl. (186.)
— Einführung in die Ph. Von Prof. Dr. R. Richter. 4. Aufl. von Priv.-Doz Dr M. Brahn. (Bd. 155.)
— Führende Denker. Geschichtl. Einleit. in die Philosophie. Von Prof Dr. J. Cohn. 4. Aufl. Mit 6 Bildn. (Bd. 176.)
— Die Phil. d. Gegenw. in Deutschland. V. Prof Dr. O. Külpe. 6. Aufl. (41.)
Poetik. Von Dr. R. Müller-Freienfels. (Bd. 460.)
Psychologie. Einführ. i. d. Ps. V. Prof. Dr. E. von Aster. 2. Afl. M. 4 Abb. (492.)
— Psychologie d. Kindes. V. Prof. Dr. R. Gaupp. 4. Aufl. M. 17 Abb. (213 214.)
— Psychologie d. Verbrechers. (Kriminalpsychol.) V Strafanstaltsdir. Dr. med. H. Pollitz. 2. Aufl. M. 5 Diagr. (Bd. 248.)
— Einführung in die experiment. Psychologie. Von Prof. Dr. N. Braunshausen. 2. Afl. M. 17 Abb. i. T. (484.)
— s. auch Handschriftenbeurteilg., Hypnotismus u Sugg., Mechanik d. Geisteslebs., Poetik, Seele d. Menschen, Verantwortg. u. Vererb., Willensfreiheit; Pädag. Abt. II.
Reformation siehe Calvin, Luther.
Religion. Die Stellung der R. im Geistesleben. Von Konsistorialrat Lic. Dr. H. Kalweit. 2. Aufl. (Bd. 225.)
— Relig. u. Philosophie im alten Orient. Von Prof. Dr. E. von Aster. (Bd. 521.)
— Einführung in die allg. R.-Geschichte. Von Prof D Dr K. Beth. (Bd. 658.)
— Die nichtchristlichen Kulturreligionen in ihrem gegenwärtigen Zustand. Von Prof. Dr. C. Clemen. (Bd. 535.)
— Die Religion der Griechen. Von Prof Dr. C. Samter. M. Bildern. (Bd. 457.)
— Hellenistisch-röm. Religionsgesch. Von Hofprodig. Lic. A. Jacoby. (Bd. 584.)
Religion. D. Grundzüg. d. israel. Religionsgesch. V. Prof. D. Fr. Giesebrecht. 3. A. V. Prof. D. A. Bertholet. (52.)
— Religion u. Naturwissensch. in Kampf u. Friedl. E. geschichtl. Rückbl. V. Pfarr. Dr. A Pfannkuche. 2. A. (Bd. 141.)
— Die relig. Strömungen der Gegenwart. V. Sup. D. A. H. Braasch. 3. A. (66.)
— s. a. Bergson, Buddha, Calvin, Christentum, Luther.
Rousseau. Von Prof. Dr. V. Henkel. 3. Aufl. Mit 1 Bildnis. (Bd. 180.)
Schopenhauer. Seine Persönlichk., s. Lehre, s. Bedeutg. V. Oberrealschuldir. H. Richert. 3. Aufl. Mit 1 Bildnis. (Bd. 81.)
Seele des Menschen. Die. Von Geh. Rat Prof. Dr. J. Rehmke. 4. Aufl. (Bd. 36.)
— siehe Leib u. Seele, auch Psychologie.
Sexualethik. Von Prof. Dr. H. E. Timerding. (Bd. 592.)
Sinne d. Menschen. D. Sinnesorgane und Sinnesempfind. V. Hofr. Prof Dr J. K. Kreibig. 3., orb. A. M. 30 Abb. (27.)
Sitti. Lebensanschauungen d. Gegenwart. V. Gh. Kirchenr. Prof. D. O. Kirn. 3. A. V. Prof. D. Dr. O. Stephan. (177.)
— s. a. Ethik. Sexualethik.
Spencer, Herbert. Von Dr. K. Schwarze. Mit 1 Bildnis. (Bd 245.)
Staat und Kirche in ihrem gegenseitigen Verhältnis seit der Reformation. Von Pfarr. Dr. A. Pfannkuche. (Bd. 485.)
Sternglaube und Sterndeutung. Die Geschichte u. d. Wes. d. Astrolog. Unt. Mitw. v. Geh. Rat Prof. Dr K Bezold dargest. v. Geh. Hofr. Prof. Dr. Fr. Boll. 2. Aufl. M. 1 Sternk. u. 20 Abb. (Bd. 638.)
Suggestion s. Hypnotismus.
Testament. Das Alte. Seine Gesch. u. Bedeutg. V. Prof. Dr. V. Thomsen. (609.)
— Neues. Der Text d. N. T. nach s. geschichtl. Entwickl. V. Div.-Pfarr. Prof. Lic. A. Pott. 2. Afl. M. Taf. (Bd. 134.)
Theologie. Einführung in die Theologie. Von Pastor M. Cornils. (Bd. 347.)
Veranlagung u. Vererbung, Geistige. V. Dr. phil. et med. G. Sommer. (Bd. 512.)
Urchristentum siehe Christentum.
Weltanschauung, Griechische. Von Prof. Dr. M. Wundt. 2. Aufl. (Bd. 329.)
Weltanschauungen. Die d. großen Philosophen der Neuzeit. Von Prof. Dr. L. Busse. 6. Aufl., hrsg. v. Geh. Hofrat Prof. Dr. A. Falckenberg. (Bd 56.)
Weltentstehung. Entsteh. d. W. u. d. [illegible] nach Sage u. Wissenschaft. Von Prof [illegible]r. M. V. Weinstein. 3. Aufl. (Bd. [illegible])
Weltuntergang. Untergang der Welt [illegible] der Erde nach Sage und Wissenscha[illegible]. Prof Dr M. V. Weinstein. Bd [illegible])
Willensfreiheit. Das Problem der W. [illegible] Prof. Dr. G. F. Lipps. 2. Afl. (Bd. [illegible])
— s. a. Ethik, Mechan. d. Geisteslebs. [illegible]

II. Pädagogik und Bildungswesen.

Berufswahl. Begabung u. Arbeitsleistung in ihren gegenseitigen Beziehungen. Von W. J. Ruttmann. M. 7 Abb. (Bd. 522.)
Bildungswesen, D. deutsche, in s. geschichtlichen Entwicklung. Von Prof. Dr. Fr. Paulsen. 3. Aufl. Von Prof. Dr. W. Münch. M. Bildn. Paulsens. (Bd. 100.)
— s. auch Volksbildungswesen.
Erziehung. E. zur Arbeit. Von Prof. Dr. Edv. Lehmann. (Bd. 459.)
— Deutsche E. in Haus u. Schule. Von J. Tews. 3. Aufl. (Bd. 159.)
— siehe auch Großstadtpädagogik.
Fortbildungsschulwesen, Das deutsche. Von Dir. Dr. F. Schilling. (Bd. 256.)
Fröbel, Friedrich. Von Dr. Joh. Prüfer. Mit 1 Tafel. (Bd. 82.)
Großstadtpädagogik. V. J. Tews. (327.)
— siehe Erzieh., Schulkämpfe d. Gegenw.
Herbarts Lehren und Leben. Von Pastor O. Flügel. 2. Aufl. Mit 1 Bildnis Herbarts. (Bd. 164.)
Hochschulen s. Techn. Hochschulen u. Univ.
Jugendspiele. Von Fortbildungsschullehrer W. Wiemann. (Bd. 434.)
Leibesübungen siehe Abt. V.
Mittelschule s. Volks- u. Mittelschule.
Pädagogik. Allgemeine. Von Prof. Dr. Th. Ziegler. 4. Aufl. (Bd. 33.)
— Experimentelle P. mit bes. Rücksicht auf die Erzieh durch die Tat. Von Dr. W. A. Lay. 3., verb. A. M. 6 Abb. (Bd. 224.)
— s. Erzieh., Großstadtpäd.; Handschriftenbeurteilung, Psychol., Veranlag. u. Vererb. Abt. I.
Pestalozzi. Leben und Ideen. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. P. Natorp. 3. Aufl. Mit Bildn. u. 1 Brieffaksimile. (Bd. 250.)
Rousseau. Von Prof. Dr. B. Henkel. 3. Aufl. Mit 1 Bildnis. (Bd. 180.)
Schule siehe Fortbildungs-, Hilfsschulwes., Techn. Hoch-, Mädch.-, Volksschule, Univ.
Schulhygiene. Von Prof. Dr. L. Burgerstein. 3 Aufl. M. 33 Fig. (Bd. 96.)
Schulkämpfe d. Gegenw. Von J. Tews. 2. Aufl. (Bd. 111.)
— siehe Erziehung, Großstadtpäd.
Student, Der Leipziger, von 1409 bis 1909. Von Dr. P. Bruchmüller. Mit 25 Abb. (Bd. 273.)
Studententum, Geschichte des deutschen St. Von Dr. W. Bruchmüller. (Bd. 477.)
Techn. Hochschulen in Nordamerika. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. S. Müller. M. zahlr. Abb., Karte u. Lagepl. (190.)
Universitäten. über U. u. Universitätsstud. V. Prof. Dr. Th. Ziegler. Mit 1 Bildn. Humboldts. (Bd. 411.)
Unterrichtswesen, Das deutsche, der Gegenwart. Von Geh. Studienrat Oberrealschuldir. Dr. K. Knabe. (Bd. 299.)
Volksbildungswesen, Das mod. V. Stadtbibl. Prof. Dr. G. Fritz. M. 14 Abb. (266.)
Volks- und Mittelschule, Die preußische, Entwicklung und Ziele. Von Geh. Reg.- u. Schulrat Dr. A. Sachse. (Bd. 432.)
Zeichenkunst. Der Weg zur Z. Ein Buch f. theor. u. prakt. Selbstbd. V. Dr. E. Weber. 2. A. M. 81 Abb. u. 1 Farbt. (430.)

III. Sprache, Literatur, Bildende Kunst und Musik.

Architektur siehe Baukunst und Renaissancearchitektur.
Ästhetik. Von Prof. Dr. R. Hamann. 2. Aufl. (Bd. 345.)
— Einführung i. d. Geschichte d. Ä. Von Dr. H. Rohl. (Bd. 502.)
Baukunst. Deutsche B. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Matthaei. 4 Bd. I. Deutsche Baukunst im Mittelalter. V. d. Anf. b. z. Ausgang d. roman. Baukunst. 4. Aufl. Mit 35 Abb. (Bd. 8.) II. Gotik u. „Spätgotik". 4. Aufl. Mit 67 Abb. (Bd. 9.) III. Deutsche Baukunst in d. Renaissance u. d. Barockzeit b. z. Ausg. d. 18. Jahrh. 2. Aufl. Mit 63 Abb. i. Text. (Bd. 326.) IV. Deutsche B. im 19. Jahrh. Mit 35 Abb. (Bd. 463.)
— : auch Renaissancearchitektur.
B — siehe Sandaia.
B — : Kunst, Bau und Leben der b. K. Dir. Prof. Dr. Th. Volbehr. 2. Aufl. Mit 44 Abb. (Bd 68.)
— : auch Baukunst, Griech. Kunst, Impressionismus, Kunst, Maler, Malerei, Plastik.
Bjornson siehe Ibsen.
Buch, Wie ein Buch entsteht siehe Abt. VI.
— s. auch Schrift- u. Buchwesen Abt. IV.
Dekorative Kunst d. Altertums. V. Dr. Fr. Poulsen. M. 112 Abb. (Bd. 454.)
Deutsch siehe Baukunst, Drama, Frauendichtung, Heldensage, Kunst, Literatur, Lyrik, Maler, Malerei, Personennamen, Romantik, Sprache, Volkslied, Volkssage.
Drama. Das. Von Dr. V. Busse. Mit Abb. 3 Bde. I: Von d. Antike z. franz. Klassizismus. 2. A., neub. v. Oberl. Dr. Niedlich. Prof. Dr. R. Imelmann u. Prof. Dr. Glaser. M. 3 Abb. II: Von Versailles bis Weimar. 2. Aufl. III: Von d. Romantik z. Gegenwart. (278 S.)
Drama, Z. dtsche. D. d. 19. Jahrh. J. s. Entwicklgesch. v. Prof. Dr. G. Witkowski. 4 Aufl. M. Bildn. Hebbels. (Bd. 51.)
— siehe auch Grillparzer, Hauptmann, Hebbel, Ibsen, Lessing, Literatur, Schiller, Shakespeare, Theater.
Dürer, Albrecht. V. Prof. Dr. R. Wustmann. 2. Aufl. von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Matthaei. Mit Titelb. u. zahlr. Abbildungen. (Bd. 97.)

Französisch siehe Roman.
Frauendichtung. Geschichte der deutschen D. seit 1800. Von Dr. H. Spiero. Mit 3 Bildnissen auf 1 Tafel. (Bd. 390.)
Fremdwortkunde. Von Dr. E. Richter.
Gartenkunst siehe Abt. VI. [(Bd. 570.)
Griech. Komödie, Die. B. Geh.-Rat. Prof. Dr. A. Korte. M. Titelb. u. 2 Taf. (400.)
Griechische Kunst. Die Blütezeit der g. K. im Spiegel der Reliefsarkophage. Eine Einf. i. d. griech. Plastik. B. Prof. Dr. H. Wachtler. 2. A. M. zahlr. Abb. (272.)
— siehe auch Dekorative Kunst.
Griech. Tragödie, Die. B. Prof. Dr. J. Geffcken. M. 5 Abb. i. T. u. a. 1 Taf. (566.)
Grillparzer, Franz. Von Prof. Dr. A. Kleinberg. M. Bildn. (Bd. 513.)
Harmonielehre. Von Dr. H. Scholz. (Bd. 703/04.)
Harmonium s. Tasteninstrum.
Hauptmann, Gerhart. B. Prof. Dr. E. Sulger-Gebing. Mit 1 Bildn. 2., verb. u. verm. Aufl. (Bd. 283.)
Haydn, Mozart, Beethoven. Von Prof. Dr. E. Krebs. 2. Aufl. M. 4 Bildn. (92.)
Hebbel, Friedrich. B. Geh. Hofr. Prof. Dr. O. Walzel. 2. A. M. 1 Bildn. (408.)
Heldensage, Die germanische. Von Dr. J. W. Bruinier. (Bd. 486.)
— siehe auch Volkssage.
Homerische Dichtung, Die. Von Rektor Dr. G. Finsler. (Bd. 496.)
Ibsen, Björnson u. i. Zeitgenossen. Von Prof. Dr. B. Kahle. 2. Aufl. v. Dr. G. Morgenstern. M. 7 Bildn. (Bd. 193.)
Impressionismus. Die Maler des I. Von Prof. Dr. B. Lázár. 2. A. M. 32 Abb. u. 1 farb. Tafel. (Bd. 395.)
Instrumente s. Tasteninstrum., Orchester.
Klavier siehe Tasteninstrumente.
Komödie siehe Griech. Komödie.
Kunst. Das Wesen der deutschen bildenden K. Von Geh. Rat Prof. Dr. H. Thode. (Bd. 585.)
— s. a. Bauk., Bild., Dekor., Griech. K.; Pompeji. Stile; Gartenk. Abt VI.
Kunstpflege in Haus u. Heimat. 3. Aufl. Mit Abb. (Bd. 77.)
Lessing. Von Dr. Ch. Schrempf. Mit einem Bildnis. (Bd. 403.)
Literatur. Entwickl. der deutsch. L. seit Goethes Tod. B. Dr. W. Brecht. (595.)
Lyrik. Geschichte d. deutsch. L. s. Claudius. B. Dr. H. Spiero. 2. Aufl. (Bd. 254.)
— siehe auch Frauendichtung, Literatur, Minnesang, Volkslied.
Maler. Die altdeutschen, in Süddeutschland. Von H. Nemitz. Mit 1 Abb. i. Text und Bilderanhang. (Bd. 464.)
— s. Michelangelo, Impression. Rembrandt.
Malerei. Die deutsche, im 19. Jahrh. Von Prof. Dr. R. Hamann. 2 Bde. Text. 2. Bde. m. 57 ganzseit. u. 200 halbs. Abb., a. i. Geschkausg. erhältl. (Bd. 448—451.)
Malerei, Niederl. M. i. 17. Jahrh. B. Prof. Dr. H. Jantzen. Mit 37 Abb.
— siehe auch Rembrandt. [(Bd. 378.)
Märchen s. Volksmärchen.
Michelangelo. Eine Einführung in das Verständnis seiner Werke. B. Prof. Dr. F. Hildebrandt. Mit 44 Abb. (392.)
Minnesang. D. Liebe i. Liede d. dtsch. Mittelalt. B. Dr. J. W. Bruinier. (404.)
Mozart siehe Haydn.
Musik. Die Grundlagen d. Tonkunst. Versuch einer entwicklungsgesch. Darstell. d. allg. Musiklehre. Von Prof. Dr. H. Riesch. 2. Aufl. (Bd. 178.)
— **Musikalische Kompositionsformen.** B. E. G. Kallenberg. Band I: Die elementar. Tonverbindungen als Grundlage d. Harmonielehre. Bd. II: Kontrapunktik u. Formenlehre. (Bd. 412. 413.)
— **Geschichte der Musik.** Von Dr. A. Einstein. (Bd. 438.)
— Beispielsammlung zur älteren Musikgeschichte. B. Dr. A. Einstein. (439.)
— Musikal. Romantik. Die Blütezeit d. m. M. in Deutschland. Von Dr. E. Istel. Mit 1 Silhouette (Bd. 239.)
— s. a. Haydn, Mozart, Beethoven, Oper, Orchester, Tasteninstrumente, Wagner.
Mythologie, Germanische. Von Prof. Dr. J. v. Negelein. 3. Aufl. (Bd. 95.)
— siehe auch Volkssage, Deutsche.
Niederländische Malerei s. Malerei.
Novelle siehe Roman.
Oper. Die moderne. Vom Tode Wagners bis zum Weltkrieg (1883—1914). Von Dr. E. Istel. Mit 3 Bildn. (Bd. 495.)
— siehe auch Haydn, Wagner.
Orchester. Das moderne Orchester. Von Prof. Dr. Fr. Volbach. I. Die Instrumente d. O. (Bd. 384.) II D. mod. O. i. s. Entwicklg. 2. Aufl. (Bd. 398.)
Orgel siehe Tasteninstrumente.
Personennamen. D. deutsch. B. Geh. Studienrat A. Bähnisch. 2. A. (Bd. 296.)
Perspektive, Grundzüge der P. nebst Anwendungen. Von Prof. Dr. K. Doehlemann. Mit 91 Fig. u. 11 Abb. (510.)
Phonetik. Einführ. i. d. Ph. Wiss. Sprechen. B. Dr. E. Richter. M. 20 A. (354.)
Photographie. D. künstler. Ihre Entwicklg., ihre Probl., i. Bedeutg. B. Dr. W. Warstat. 2., verb. Aufl. M. Bilderanh. (410.)
— s. auch Photographie Abt. VI.
Plastik s. Griech. Kunst, Michelangelo.
Porträt. Von Dr. R. Müller-Freienfels. (Bd. 488.)
Pompeji. Eine hellenist. Stadt in Italien. Von Prof. Dr. Fr. v. D... 3. Aufl. M. 62 Abb. i. T. u. auf 1 Taf. sowie 1 Plan. (Bd. ...)
Projektionslehre. In kurzer leichtfaßl. Darstellung f. Selbstunterr. und Gebrauch. B. Zeichenl. A. Schubei... Mit 164 Fig.

Rembrandt. Von Prof. Dr. W. Schuhring. 2. Aufl. Mit 48 Abb. auf 28 Taf. i. Anh. (Bd. 158.)

Renaissancearchitektur in Italien. Von Dr. W. Frankl. 2 Bde. I. M. 12 Taf. u. 27 Textabb. II. M. Abb. (Bd. 381/382.)

Rhetorik. Von Prof. Dr. E. Geißler. 2 Bde. 2. Aufl. I. Richtlinien für die Kunst des Sprechens. II. Deutsche Redekunst. (Bd. 455/456.)

Roman. Der französische Roman und die Novelle. Ihre Geschichte v. d. Anf. b. z. Gegenw. Von O. Flake. (Bd. 377.)

Romantik. Deutsche. V. Geh. Hofrat Prof. Dr. O. F. Walzel. 4. Aufl. I. Die Weltanschauung. II. Die Dichtung. (Bd. 232/233.)

— Die Blütezeit der mus. R. in Deutschland. Von Dr. E. Istel. (Bd. 239.)

Sage siehe Heldensage, Mythol., Volkssage.

Schauspieler, Der. Von Prof. Dr. Ferdinand Gregori. (Bd. 692.)

Schiller. Von Prof. Dr. Th. Ziegler. Mit 1 Bildn. 3. Aufl. (Bd. 74.)

Schillers Dramen. Von Progymnasialdirektor E. Heusermann. (Bd 493.)

Shakespeare und seine Zeit. Von Prof. Dr. E. Sieper. M. 3 Abb. 2. Aufl. (185.)

Sprache. Die Haupttypen des menschlich. Sprachbaus. Von Prof. Dr. F. N. Finck. 2. Aufl. v. Prof. Dr. E. Kieckers. (268.)

— Die deutsche Sprache von heute. Von Dr. W. Fischer. (Bd. 475.)

— Fremdwortkunde. Von Dr. Elise Richter. (Bd. 570.)

— siehe auch Phonetik, Rhetorik; ebenso Sprache u. Stimme Abt. V.

Sprachstämme, Die, des Erdkreises. Von Prof. Dr. F. N. Finck. 2. Aufl. (Bd. 267.)

Sprachwissenschaft. Von Prof. Dr. Kr. Sandfeld-Jensen. (Bd. 472.)

Stile. Die Entwicklungsgesch. d. St. in der bild. Kunst. V. Dr. E. Cohn-Wiener. 2. Aufl. I.: V. Altertum b. z. Gotik. M. 66 Abb. II.: V. d. Renaissance b. z. Gegenwart. Mit 42 Abb. (Bd. 317/318.)

Tasteninstrumente. Klavier. Orgel. Harmonium. Das Wesen der Tasteninstrumente. V. Prof. Dr. O. Bie. (Bd. 325.)

Theater, Das. Schauspielhaus u. -kunst v. griech. Altert. bis auf d. Gegenw. V. Prof. Dr. Chr. Gaehde. 2. A. 18 Abb. (Bd. 230.)

Tragödie s. Griech. Tragödie.

— siehe auch Schauspieler.

Urheberrecht siehe Abt. VI.

Volkslied. Das deutsche. Über Wesen und Werden d. deutschen Volksgesanges. Von Dr. J. W. Bruinier. 5. Aufl. (Bd. 7.)

Volksmärchen, Das deutsche. V. Pfarrer K. Spieß. (Bd. 587.)

Volkssage. Die deutsche. Übersichtl. dargest. v. Dr. O. Böckel. 2. Aufl. (Bd. 262.)

— siehe auch Heldensage, Mythologie

Wagner. Das Kunstwerk Richard W.s. Von Dr. E. Istel. M. 1 Bildn. 2. Aufl. (30.)

— siehe auch Musikal. Romantik u. Oper.

Zeichenkunst. Der Weg z. S. Ein Büchlein für theoretische und praktische Selbstbildung. Von Dr. E. Weber. 2. Aufl. Mit 81 Abb. u. 1 Farbtafel. (Bd. 430.)

— s. auch Perspektive, Projektionslehre; Geomtr. Zeichnen Abt. V, Techn. Abt. VI.

Zeitungswesen. V. Dr. H. Dieß. (Bd. 328.)

IV. Geschichte, Kulturgeschichte und Geographie.

Alpen, Die. Von H. Reishauer. 2., neub. Aufl. von Dr. H. Slanar. Mit 26 Abb. und 2 Karten. (Bd. 276.)

Altertum, Das, im Leben der Gegenwart. V. Prov.-Schul- u. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. P. Cauer. 2. Aufl. (Bd. 356.)

— D. Altertum, seine staatliche u. geistige Entwicklung und deren Nachwirkungen. Von Oberlehr. H. Preller. (Bd. 642.)

Amerika. Gesch. d. Verein. Staaten v. A. V. Prof. Dr. E. Daenell. 2. A. (Bd. 147.)

Amerikaner, Die. V. R. M. Butler. Dtsch. v. Prof. Dr. W. Paszkowski. (319.)

A ...tschaftsgeschichte. V. Privatdoz. ...urath. 2. Auflage. (Bd. 258.)

A ...n nach den ägyptischen Papyri. Geh. Postrat Prof. Dr. Fr. Preis... Mit 1 Tafel. (Bd. 565.)

A ...bewegung s. Soziale Bewegungen.

A ...nd Neuseeland. Land, Leute ...tschaft. Von Prof. Dr. R. ... Mit 23 Abb. (Bd. 366.)

Babylonische Kultur, Die, i. Verbreit. u. i. Nachwirkungen auf d. Gegenw. V. Prof. Dr. F. E. Lehmann-Haupt. (Bd. 579.)

Baltische Provinzen. V. Dr. V. Tornius. 3. Aufl. M. 8 Abb. u. 2 Kartenskz. (Bd. 542.)

Bauernhaus. Kulturgeschichte des deutschen V. Von Baurat Dr.-Ing. Chr. Rauch. 3. Aufl. Mit Abb. (Bd. 121.)

Bauernstand. Gesch. d. dtsch. V. V. Prof. Dr. H. Gerdes. 2., verb. Aufl. Mit 22 Abb. i. Text (Bd. 320.)

Belgien. Von Dr. V. Oswald. 3. Aufl. (Bd. 501.) Mit 4 Karten i. T.

Bismarck und seine Zeit. Von Professor Dr. V. Valentin. Mit einem Titelbild. 4., durchges. Aufl. (Bd. 500.)

Böhmen. Zur Einführung in die böhmische Frage. Von Prof. Dr. R. F. Kaindl. Mit 1 Karte. (Bd. 701.)

Brandenburg.-preuß. Gesch. Von Archivar Dr. Fr. Israel. 2 Bde. I. Von d. ersten Anfängen b. z. Tode König Fr. Wilhelms I. 1740. II. Von dem Regierungsantritt Friedrichs d. Gr. bis zur Gegenwart. (Bd. 440/441.)

Bürger im Mittelalter s. Städte.

Calvin, Johann. Von Pfarrer Dr. G. Sodeur. Mit 1 Bildnis. 2 Aufl. (Bd. 247.)

China. V. Prof. Dr. A. Conrady. (557.)

Christentum u. Weltgeschichte seit der Reformation. Von Prof. D. Dr. K. Sell. 2 Bde. (Bd 297/298.)

Deutsch siehe Bauernhaus, Bauernstand, Dorf, Feste, Frauenleben, Geschichte, Handel, Handwerk, Reich, Staat, Städte, Verfassung, Verfassungsrecht, Volkskunde, Volksstämme, Volkstrachten, Wirtschaftsleben usw.

Deutschtum im Ausland, Das, vor dem Weltkriege. Von Prof. Dr. R. Hoenger. 2. Aufl. (Bd. 402.)

Dorf, Das deutsche. V. Prof. R. Mielke. 3. Aufl. Mit 51 Abb. (Bd. 192.)

Eiszeit, Die, und der vorgeschichtliche Mensch. Von Geh. Bergrat Prof. Dr. G. Steinmann. 2. Aufl. M. 24 Abbildungen. (Bd. 302.)

Englands Weltmacht in ihrer Entwickl. seit d. 17. Jahrh. M. Bildn. V. Dir. Prof. Dr. W. Langenbeck. 2. Aufl. (Bd. 174.)

Entdeckungen, Das Zeitalter der E. Von Prof. Dr. S. Günther. 3. Aufl. Mit 1 Weltkarte. (Bd. 26.)

Erde siehe Mensch u. E.

Erdkunde, Allgemeine. 8 Bde. Mit Abb. I. Die Erde, ihre Beweg. u. ihre Eigenschaften (math. Geogr. u. Geonomie). Von Admiralitätsr. Prof. Dr. E. Kohlschütter. (Bd. 625.) II. Die Atmosphäre der Erde (Klimatologie, Meteorologie). Von Prof. O. Baschin. (Bd. 626.) III. Geomorphologie. Von Prof. F. Machatschek. M. 33 Abb. (Bd. 627.) IV. Physiogeographie d. Süßwassers. V. Prof. F. Machatschek. M. 24 Abb. (Bd. 628.) V. Die Meere. Von Prof. Dr. A. Merz. (Bd. 629.) VI. Die Verbreitung der Pflanzen. Von Dr. Brockmann-Jerosch. (Bd. 630.) VII. Die Verbreitg. d. Tiere. V. Dr. W. Knopfli. (Bd. 631.) VIII. Die Verbreitg. d. Menschen auf d. Erdoberfläche (Anthropogeographie). V. Prof. Dr. N. Krebs. (Bd. 632.)

Europa. Vorgeschichte E.'s. Von Prof. Dr. H. Schmidt. (Bd. 571/572.)

Familienforschung. Von Dr. E. Devrient. 2. Aufl. M. 6 Abb. i. T. (350.)

Feldherren, Große. Von Major F. C. Endres. (Bd. 687/688.)

Feste, Deutsche, u. Volksbräuche. V. Priv.-Doz. Dr. E. Fehrle. M. 30 Abb. (Bd 518.)

Finnland. Von Lektor F. Ohquist. (700.)

Französ. Geschichte. I.: D. frz. Königstum. V. Prof. Dr. R. Schwemer. (Bd. 574.)
— siehe auch Napoleon, Revolution.

Frauenbewegung, Die mod. V. Dr. Marie Bernays. (Bd 723.)

Frauenleben. Deutsch., i. Wandel d. Jahrhunderte. Von Geh. Schulrat Dr. Ed. Otto. 3. Aufl. 12 Abb. i. T. (Bd. 45.)

Friedrich d. Gr. 6 Vortr. V. Prof. Dr. Th. Bitterauf. 2. A. M. 2 Bildn. (246.)

Gartenkunst. Gesch. d. G. V. Baurat Dr.-Ing. Chr. Rauch. M. 41 Abb. (274.)

Geographie der Vorwelt (Paläogeographie). Von Priv.-Doz. Dr. E. Dacque. Mit 78 Abb. (Bd. 610.)

— **Einführg. i. d. Studium der G.** Von Prof. Dr. G. Braun. (Bd. 693.)

Geologie siehe Abt. V.

German. Heldensage s. Heldensage.

Germanische Kultur in der Urzeit. Von Bibliotheksdir. Prof. Dr. G. Steinhausen. 3. Aufl. Mit 13 Abb. (Bd. 75.)

Geschichte, Deutsche, im 19. Jahrh. b. z. Reichseinheit. V. Prof. Dr. R. Schwemer. 3 Bde. I.: Von 1800—1848. Restauration und Revolution. 3. Aufl. (Bd. 37.) II.: Von 1848—1862. Die Reaktion und die neue Ära. 2. Aufl. (Bd. 101.) III.: Von 1862—1871. V. Bund z. Reich. 2. Aufl. (Bd. 102.)

Gesellschaft u. Geselligkeit in Vergangenh. u. Gegenwart. Von Oberin E. Trautwein. (Bd. 706.)

Griechentum. Das G. in seiner geschichtlichen Entwicklung. Von Prof. Dr. R. v. Scala. Mit 46 Abb. (Bd. 471.)

Griechische Städte. Kulturbilder aus gr. St. Von Professor Dr. E. Siebarth. 2. A. M. 23 Abb. u. 2 Tafeln. (Bd. 131.)

Handel. Geschichte d. Welthandels. Von Realgymnasial-Dir. Prof. Dr. M. G. Schmidt. 3. Aufl. (Bd. 113.)

— **Geschichte des deutschen Handels** seit d. Ausgang des Mittelalters. Von Dir. Prof. Dr. W. Langenbeck. 2. Aufl. Mit 16 Tabellen. (Bd. 237.)

Handwerk, Das deutsche, in seiner kulturgeschichtl. Entwickl. Von Geh. Schulrat Dr. E. Otto. 4. Aufl. Mit 33 Abb. auf 12 Tafeln. (Bd. 14.)

— siehe auch Dekorative Kunst Abt. III.

Haus, Kunstpflege im Haus und Heimat. 3. Aufl. Mit Abb. (Bd. 77.)

— siehe auch Bauernhaus, Dorf.

Heldensage, Die germanische. Von Dr. J. W. Bruinier. (Bd 486.)

Hellenist.-röm. Religionsgeschichte s. Abt. I.

Jesuiten, Die. Eine hist. Skizze. Von [illegible] Dr. H. Boehmer. 4. Aufl. (1[illegible])

Indien. Von Prof. Dr. Sten [illegible] (2[illegible])

Indogermanenfrage. Von Dir. [illegible] Agahd (2[illegible])

Island. d. Land u. d. Volk. V. Prof. L. Herrmann. M. 9 Abb. (Bd 4[illegible])

Kaisertum und Papsttum. Von Prof. A. Hofmeister. [illegible])

Kartenkunde. Vermessungs- u. K. 6 Bde. Mit Abb. I. Geogr. Ortsbestimmung. Von Prof. Schnauder. (Bd. 606.) II. Erdmessung. Von Prof. Dr. O. Eggert. (Bd. 607.) III. Landmess. Z. Geh. Finanzrat Suckow. (Bd. 608.) IV. Ausgleichungsrechnung. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. E. Hegemann. (Bd. 609.) V. Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie. Von Diplom-Ing H Lüscher. (Bd. 610.) VI. Kartenkunde. Von Finanzrat Dr.-Ing. A. Egerer. 1. Einführ. i. d. Kartenverständnis. 2. Kartenherstellung (Landesaufn.). (Bd. 611/612.)
Kirche s. Staat u. K.; Kirche Abt. I.
Kolonien, Die deutschen. (Land u. Leute.) Von Dr. A. Heilborn. 2. Aufl. Mit 28 Abb. u. 3 Karten. (Bd. 98.)
Königtum, Französisches. Von Prof Dr. R. Schwemer (Bd 574.)
Krieg. Kulturgeschichte d. Kr. Von Prof. Dr. K. Beule, Geh. Hofrat Prof. Dr. E. Bethe, Prof. Dr. B. Schmeidler, Prof. Dr. A. Doren, Prof. Dr. B. Herre. (Bd. 561.)
— Der Dreißigjährige Krieg. Von Dr. Fritz Endres. (Bd. 577.)
— s. auch Feldherren.
Kriegsschiffe, Unsere. Ihre Entstehung u. Verwendung. B. Geh. Mar.-Baur. a. D. E. Krieger. 2. Aufl. v. Geh. Mar.-Baur. Fr. Schürer. M. 62 Abb. (389.)
Luther, Martin 2. u. d. dtsche. Reformation. Von Prof. Dr. B. Kößler. 2., verb. Aufl. M. 1 Bildn. Luthers. (Bd. 515.)
— s. auch Von L. zu Bismarck.
Marx, Karl. Versuch einer Einführg. B. Prof. Dr. R. Wilbrandt. 2. A. (621.)
Mensch u. Erde. Skizzen v. den Wechselbeziehungen zwischen beiden. Von Geh. Rat Prof. Dr A. Kirchhoff. 4. Aufl.
— s. a. Eiszeit; Mensch Abt. V. [(Bd. 31.)
Mittelalter. Mittelalterl. Kulturideale. B. Prof. Dr. B. Bebel. I.: Heldenleben. II: Ritterromantik. (Bd. 292. 293.)
— s. auch Städte u. Bürger i. M.
Moltke. Von Major F. C. Endres. Mit 1 Bildn. (Bd. 415.)
Münze. Grundriß d. Münzkunde. 2. Aufl. I. Die Münze nach Wesen, Gebrauch u. Bedeutg. B. Hofrat Dr. A. Luschin v. Ebengreuth. M. 56 Abb. II. Die Münze v. Altertum b. z. Gegenw. Von Prof. Dr. H. Buchenau. (Bd. 91, 657.)
— s. a. Finanzwiss., Geldwesen Abt. VI.
— nische Kultur, Die. Von Prof. Dr. F. Lehmann-Haupt. (Bd. 581.)
logie s. Abt. I.
sien I. Von Prof. Dr. Th. Bitter. 3 Aufl. Mit 1 Bildn. (Bd. 195.)
malbewußtsein siehe Volk.
u. Mensch. B. Dir. Prof. Dr. M. G. nidt. M. 19 Abb. (Bd. 458.)
Naturvölker, Die geistige Kultur der N. B. Prof. Dr. K. Th. Preuß. M. 9 Abb.
— s. a. Völkerkunde, allg. [(Bd. 452.)
Neugriechenland. Von Prof. Dr. A. Heisenberg. (Bd. 613.)
Neuseeland s. Australien.
Orient s. Indien, Palästina, Türkei.
Osten. Der Zug nach dem O. Die Großtat d. deutsch. Volkes i. Mittelalt. B. Geh. Hofrat Prof. Dr. Hampe. (Bd. 731.)
Ostmark s. Abt. VI.
Österreich. Ö.'s innere Geschichte von 1848 bis 1895. B. R. Charmatz. 3., veränd. Aufl. I. Die Vorherrschaft der Deutschen. II. Der Kampf der Nationen. (651/652.)
— Geschichte der auswärtigen Politik Ö.'s im 19. Jahrhundert. B. R. Charmatz. 2., veränd. Aufl. I. Bis zum Sturze Metternichs. II. 1848—1895. (653/654.)
— Österreichs innere u. äußere Politik von 1895—1914. B. R. Charmatz. (655.)
Ostseegebiet, Das. B. Prof. Dr. G. Braun. M. 21 Abb. u. 1 mehrf. Karte. (Bd. 367.)
— s. auch Baltische Provinzen, Finnland.
Palästina und seine Geschichte. Von Prof. Dr. H. Frh. von Soden. 4. Aufl. Mit 1 Plan von Jerusalem u. 3 Anf. d. Heiligen Landes. (Bd. 6.)
— B. u. s. Kultur in 5 Jahrtausenden. Nach d. neuest. Ausgrab. u. Forschungen dargest. von Prof Dr. P. Thomsen. 2., neubearb. Aufl. Mit 37 Abb. (260.)
Papsttum s. Kaisertum.
Pauli s. Antikes Leben.
Polarforschung. Geschichte der Entdeckungsreisen zum Nord- u. Südpol v. d. ältest. Zeiten bis zur Gegenw. B. Prof. Dr. K. Hassert. 3. Aufl. M. 6 Kart. (Bd. 38.)
Polen. Mit einem geschichtl. Überblick üb. d. polnisch-ruthen. Frage. B. Prof. Dr. R. F. Kaindl. 2., verb. Aufl. M. 6 Kart. (547.)
Politik. B. Dr. A. Grabowsky. (Bd. 537.)
— Umrisse der Weltpol. B. Prof. Dr. J. Hashagen. 3 Bde. I: 1871—1907. 2. Afl. II: 1908—1914. 2. Afl. III: D. pol. Ereign. währ. d. Krieges. (Bd. 553/55.)
— Politische Geographie. Von Prof. Dr. W. Vogel. (Bd. 634.)
— Politische Hauptströmungen in Europa im 19. Jahrhundert. Von Prof. Dr. K. Th. v. Heigel. 4. Aufl. von Dr. Fr. Endres. (Bd. 129.)
Pompeji, eine hellenistische Stadt in Italien. Von Prof Dr. Fr. v. Duhn. 3. Aufl. Mit 62 Abb. i. T. u. auf 1 Taf., sowie 1 Plan. (Bd. 114.)
Preußische Geschichte s. Brandenb.-pr. G.
Reaktion und neue Ära s. Gesch., deutsche.
Reformation s. Calvin, Luther.
Reich. Das Deutsche R. von 1871 b. z. Weltkrieg. B. Archivar Dr. F. Israel. (575.)
Religion s. Abt. I.
Restauration und Revolution siehe Geschichte, deutsche.

Revolution. Geschichte der Französ. R. B. Prof. Dr. Th. Bitterauf. 2. Aufl. Mit 8 Bildn. (Bd. 346.)
— 1848. 6 Vorträge. Von Prof. Dr. O. Weber. 3. Aufl. (Bd. 53.)
Rom. Das alte Rom. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. O. Richter. Mit Bilderanhang u. 4 Plänen (Bd. 386.)
— Die römische Republik. Von Privatdoz. Dr. A. Rosenberg. (Bd. 719.)
— Soziale Kämpfe i. alt. Rom. B. Privatdozent Dr. L. Bloch. 3. Aufl. (Bd. 22.)
— Roms Kampf um die Weltherrschaft. Von Geh. Hofrat Prof. Dr. J. Kromayer. (Bd. 368.)
Geschichte der Römer. Von Prof. Dr. R. v. Scala. (Bd. 578.)
— siehe auch Hellenist.-röm. Religionsgeschichte Abt. I: Pompeji Abt. III.
Rußland. Geschichte, Staat, Kultur. Von Dr. A. Luther. (Bd. 563.)
Schrift- und Buchwesen in alter und neuer Zeit. Von Prof. Dr. O. Weise. 4. Aufl. Mit 37 Abb. (Bd. 4.)
— s. a. Buch Wie ein B. entsteht. Abt. VI.
Schweiz. Die. Land, Volk, Staat u. Wirtschaft. Von Reg.- u. Ständerat Prof. Dr. C. Wettstein. Mit 1 Karte. (Bd. 482.)
Seekrieg s. Kriegsschiff.
Sitten und Gebräuche in alter und neuer Zeit. Von Prof. Dr. E. Samter. (682.)
Soziale Bewegungen und Theorien bis zur modernen Arbeiterbewegung. Von G. Mayer. 6. Aufl. (Bd. 2.)
— s. a. Marx, Rodbertus, Sozialismus, Utopien.
Staat, St. u. Kirche in ihr. gegenf. Verhältnis seit d. Reformation. B. Pfarrer Dr. phil. A. Pfannkuche. (Bd. 485.)
— Städte u. Bürger i. Mittelalter. B. Prof. Dr. B. Heil. 3. Aufl. Mit zahlr. Abb. u. 1 Doppeltafel. (Bd. 43.)
— Verfassung u. Verwaltung d. deutschen Städte. B. Dr. M. Schmid. (Bd. 466.)
— s. a. Griech. Staat, Römer, Rom.
Sternglaube und Sterndeutung. Die Geschichte u. d. Wesen d. Astrologie. Unt. Mitwirk. v. Geh. Rat Prof. Dr. C. Bezold dargest. v. Geh. Hofr. Prof. Dr. Fr. Boll. 2. Aufl. M. 1 Sternk. u. 20 Abb. (638.)
Studium. Das Leipziger, von 1409 bis 1909. Von Dr. W. Bruchmüller. Mit 25 Abb. (Bd. 273.)
Studententum. Geschichte d. deutschen St. Von Dr. W. Bruchmüller. (Bd. 477.)
Türkei. Die. B. Reg.-Rat P. N. Krause. Mit 2 Karten i. Text und auf 1 Tafel. 2. Aufl. (Bd. 469.)
Urzeit i. german. Kultur in der U.
Verfassung. Grundzüge der V. des Deutschen Reiches. Von Geheimrat Prof. Dr. E. Löning. 5. Aufl. (Bd. 34.)
Verfassungsrecht. Deutsches, in geschichtlicher Entwicklung. Von Prof. Dr. Ed. Hubrich. 2. Aufl. (Bd. 80.)
Vermessungs- u. Kartenkunde s. Kartenk.
Volk. Vom deutschen V. zum dt. Staat. Eine Gesch. d. dt. Nationalbewußtseins. B. Prof. Dr. P. Joachimsen. (Bd. 511.)
Völkerkunde, Allgemeine. I: Feuer, Nahrungserwerb, Wohnung, Schmuck und Kleidung. Von Dr. A. Heilborn. M. 54 Abb. (Bd. 487.) II. Waffen u. Werkzeuge, Industrie, Handel u. Geld, Verkehrsmittel. Von Dr. A. Heilborn. M. 51 Abb. (Bd. 488.) III. Die geistige Kultur der Naturvölker. Von Prof. Dr. K. Th. Preuß. M. 9 Abb. (Bd. 452.)
Volksbräuche, deutsche, siehe Feste.
Volkskunde, Deutsche, im Grundriß. Von Prof. Dr. C. Reuschel. I. Allgemeines, Sprache, Volksdichtung. (Bd. 644.)
— s. auch Bauernhaus, Feste, Sitten, Sternglaub., Volkstracht., Volksstämme.
Volksstämme. Die deutschen, und Landschaften. Von Prof. Dr. O. Weise. 5., völlig umgearb. Aufl. Mit 30 Abb. i. Text u. auf 20 Taf. u. einer Dialektkarte Deutschlands. (Bd. 16.)
Volkstrachten. Deutsche. Von Pfarrer K. Spieß. Mit 11 Abb. (Bd. 342.)
Vom Bund zum Reich siehe Geschichte.
Von Jena bis zum Wiener Kongreß. Von Prof. Dr. G. Roloff. (Bd. 465.)
Von Luther zu Bismarck. 12 Charakterbild. a. deutscher Gesch. B. Prof. Dr. O. Weber. 2 Bde. 2. Aufl. (Bd. 123, 124.)
Vorgeschichte Europas. Von Prof. Dr. H. Schmidt. (Bd. 571/572.)
Vorgeschichte s. Christentum
Welthandel s. Handel.
Weltpolitik s. Politik.
Wirtschaftsgeschichte. Antike. Von Privatdozent Dr. C. Neurath. 2., umgearbeitete Auflage (Bd. 258.)
— s. a. Antikes Leben, a. d. ägypt. Papyri.
Wirtschaftsleben. Deutsches. Auf geogr. Grundl. gesch. B. Prof. Dr. Chr. Gruber. 4. Aufl. B. Dr. H. Reinlein. (42.)
— s. auch Abt. VI.

V. Mathematik, Naturwissenschaften und Medizin

Aberglaube. Der, in der Medizin u. s. Gefahr f. Gesundh. u. Leben. B. Prof. Dr. D. v. Haniemann. 2. Aufl. (Bd. 83.)
Abstammungs- und Vererbungslehre. Experimentelle. Von Prof. Dr. E. Lehmann. Mit 26 Abb. (Bd. 379.)
Abstammungslehre u. Darwinismus. B. Dr. R. Hesse. 5. A. M. 40 Abb. (Bd. 39.)
Abwehrkräfte des Körpers. Die. Einführung in die Immunitätslehre. Prof. Dr. med. H. Kämmerer. 52 Abbildungen. (Bd. ...)
Akustik, Einführung in die A. Von Dr. F. A. Schulze. (Bd. ...)
Algebra siehe Arithmetik. [Bd. ...]
Ameisen, Die. Von Dr. med. ...

Anatomie d. Menschen, Die. V. Prof. Dr. K. v. Bardeleben. 6 Bde. Jeder Bd. mit zahlr. Abb. (Bd. 418/423.) I. Zelle und Gewebe, Entwicklungsgeschichte. Der ganze Körper. 3. Aufl. II. Das Skelett. 2. Aufl. III. Das Muskel- u. Gefäßsystem. 2. Aufl. IV. Die Eingeweide (Darm-, Atmungs-, Harn- und Geschlechtsorgane, Haut). 3. Aufl. V. Nervensystem und Sinnesorgane. VI. Mechanik (Statik u. Kinetik) d. menschl. Körpers (der Körper in Ruhe u. Bewegung). 2. Aufl.
— siehe auch Wirbeltiere.
Aquarium, Das. Von E. W. Schmidt. Mit 15 Fig. (Bd. 335.)
Arbeitsleistungen des Menschen, Die. Einführ. in d. Arbeitsphysiologie. V. Prof. Dr. H. Baruttau. M. 14 Fig. (Bd. 539.)
— **Berufswahl, Begabung u. Arbeitsleistung** in i. gegens. Beziehungen. Von W. J. Ruttmann. Mit 7 Abb. (Bd. 522.)
Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Prof. P. Crantz. 2 Bände. I.: Die Rechnungsarten. Gleichungen 1. Grades mit einer u. mehreren Unbekannten. Gleichungen 2. Grades. 6. Aufl. M. 9 Fig. i. Text. II.: Gleichungen, Arithmet. u. geometr. Reih. Zinseszins- u. Rentenrechn. Kompl. Zahlen. Binom. Lehrsatz. 4. Aufl. M. 21 Fig. (Bd. 120, 205.)
Arzneimittel und Genußmittel. Von Prof. Dr. O. Schmiedeberg. (Bd. 363.)
Arzt, Der. Seine Stellung und Aufgaben im Kulturleben der Gegenw. Ein Leitfaden der sozialen Medizin. Von Dr. med. M. Fürst. 2. Aufl. (Bd. 265.)
Astronomie. Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. 2. Aufl. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. I. Probleme der mod. Astronomie. Mit 11 Fig. (Bd. 355.) II. Mod. Astronomie. (Bd. 445.)
— Die A. in ihrer Bedeutung für das praktische Leben. Von Prof. Dr. A. Marcuse. Mit 26 Abb. (Bd. 378.)
— siehe auch Mond, Planeten, Sonne, Weltall, Weltbild; Sternglaube. Abt. I.
Atome s. Materie.
Auge, Das, und die Brille. Von Prof. Dr. M. v. Rohr. 2. Aufl. Mit 84 Abb. u. 1 Lichtdrucktafel. (Bd. 372.)
Ausgleichungsrechn. s. Kartenkde. Abt. IV.
Bakterien, Die, im Haushalt und der Natur des Menschen. Von Prof. Dr. E. Gutzeit. 2. Aufl. Mit 13 Abb. (242.)
— **Die krankheiterregenden Bakterien.** [illegible]tsachen d. Entsteh., Heilung u. [illegible]ütung d. bakteriellen Infektionskrankheiten d. Menschen. V. Prof. Dr. M. [illegible]lein. 2. Aufl. M. 33 Abb. (Bd. 307.) Abwehrkräfte, Desinfektion, Pilze, [illegible]inge.
u. Tätigkeit d. menschl. Körpers. Einf. [illegible]e Physiologie d. Menschen. V. Prof. D. Sachs. 4. A. M. 34 Abb. (Bd. 32.)
[illegible] s. Arbeitsleistung.
Befruchtung und Vererbung. Von Dr. E. Teichmann. 2. Aufl. M. 9 Abb. u. 4 Doppeltafeln. (Bd. 70.)
Bewegungslehre s. Mechan., Aufg. a. d. M. I.
Bienen, Die. Von Prof. Dr. E. Zander. (Bd. 705.)
Biochemie. Einführung in die B. in elementarer Darstellung. Von Prof. Dr. M. Löb. Mit 12 Fig. 2. Aufl. v. Prof. Dr. H. Friedenthal. (Bd. 352.)
Biologie, Allgemeine. Einführ. i. d. Hauptprobleme d. organ. Natur. V. Prof. Dr. H. Miehe. 2. Aufl. 52 Fig. (Bd. 130.)
—, **Experimentelle.** Regeneration, Transplantat. und verwandte Gebiete. Von Dr. E. Thesing. Mit 1 Tafel und 69 Textabbildungen. (Bd. 337.)
— siehe a. Abstammungslehre, Bakterien, Befruchtung, Fortpflanzung, Lebewesen, Organismen, Schädlinge, Tiere, Urtiere.
Blumen. Unsere Bl. u. Pflanzen im Garten. Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 69 Abb. (Bd 360.)
— **Unf Bl. u. Pflanzen i. Zimmer.** V. Prof. Dr. U. Dammer. M. 65 Abb. (Bd. 359.)
Blut. Herz. Blutgefäße und Blut und ihre Erkrankungen. Von Prof. Dr. H. Rosin. Mit 18 Abb. (Bd. 312.)
Botanik. B. d. praktischen Lebens. V. Prof. Dr. P. Gisevius. M. 24 Abb. (Bd. 173.)
— siehe Blumen, Lebewesen, Pflanzen, Pilze, Schädlinge, Wald; Kolonialbotanik, Tabak Abt. VI.
Brille s. Auge u. d. Brille.
Chemie. Einführung in die allg. Ch. V. Studienrat Dr. B. Bavink. 2. Aufl. Mit zahlr. Fig. (Bd. 582.)
— **Ein führg. i. d. organ. Chemie;** Natürl. u. künstl. Pflanz.- u. Tierstoff. V. Studienrat Dr. B. Bavink. 2. A. 9 Abb. (187.)
— **Einführung i. d. anorganische Chemie.** V. Studienrat Dr. B. Bavink. (598.)
— **Einführung i. d. analyt. Chemie.** V. Dr. F. Rüsberg. 2 Bde. (Bd. 524, 525.)
— **Die künstliche Herstellung von Naturstoffen.** V. Prof. Dr. E. Rüst. (Bd. 674.)
— **Ch. in Küche und Haus.** Von Dr. J. Klein. 4. Aufl. (Bd. 76.)
— siehe a. Biochemie, Elektrochemie, Luft, Photoch.; Agrikulturch., Sprengstoffe, Technik. Chem. Abt. VI.
Chemikalienkunde. Von Chemiker Emil Drechsler. (Bd. 728.)
Chirurgie. Die, unserer Zeit. Von Prof. Dr. J. Feßler. Mit 52 Abb. (Bd. 339.)
Darwinismus. Abstammungslehre und D. Von Prof. Dr. R. Hesse. 5. Aufl. Mit 40 Textabb. (Bd 39.)
Desinfektion, Sterilisation und Konservierung. Von Reg.- u. Med.-Rat Dr. O. Solbrig. M. 20 Abb. i. T. (Bd. 401.)

Differentialrechnung unter Berücksichtig. d. prakt. Anwendung in der Technik mit zahlr. Beispielen u. Aufgaben versehen. Von Studienrat Dr. M. Lindow. 2. A. M. 45 Fig. i. Text u. 161 Aufg. (587.)
— siehe a. Integralrechnung.
Drogenkde. V. Chem. E. Drechsler. (727.)
Dynamik s. Mechanik, Aufg. a. d., techn. M. 2 Bd., ebenso Thermodynamik.
Eiszeit, Die, u. der vorgesch. Mensch. Von Geh. Bergr. Prof. Dr. G. Steinmann. 2. Aufl. Mit 24 Abb. (Bd. 302.)
Elektrochemie u. ihre Anwendungen. Von Prof. Dr. K. Arndt. 2. Aufl. Mit 37 Abb. i. T. (Bd. 234.)
Elektrotechnik, Grundlagen der E. Von Oberingenieur A. Roth. 2. Aufl. Mit 74 Abb. (Bd. 391.)
Energie. D. Lehre v. d. E. V. Oberlehr. A. Stein. 2. A. M. 13 Fig. (Bd. 257.)
Entwicklungsgeschichte d. Menschen. V. Dr. A. Heilborn. M. 60 Abb. (Bd. 368.)
Erde s. Weltentstehung u. -untergang.
Ernährung und Nahrungsmittel. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Kunz. 3. Aufl. Mit 6 Abb. i. T. u. 2 Taf. (19.)
Experimentalchemie s. Luft usw.
Experimentalphysik s. Physik.
Farben s. Licht u. F.: s. a. Farben Abt. VI.
Festigkeitslehre s. Statik.
Fixsterne, Die. V. Dr. Aug. Kühl. (677.)
Fortpflanzung. F. und Geschlechtsunterschiede d. Menschen. Eine Einführung in die Sexualbiologie. V. Prof. Dr. H. Boruttau. 2. Aufl. M. 39 Abb. (Bd. 540.)
Garten. Der Kleine. Von Redakteur Joh. Schneider. 2. Aufl. M. 80 Abb. (498.)
— **Der Hausgarten.** Von Gartenarchitekt W. Schubert. Mit Abb. (Bd. 502.)
— siehe auch Blumen, Pflanzen; Gartenkunst, Gartenstadtbewegung Abt. VI.
Gebiß. Das menschl., s. Erkrankn. u. Pflege. V. Zahnarzt Fr. Jäger. M. 24 Abb. (229.)
Geisteskrankheiten. V. Geh. Med.-Rat Oberstabsarzt Dr. G. Ilberg. 2. A. (151.)
Genußmittel siehe Arzneimittel u. Genußmittel; Tabak Abt. VI.
Geographie s. Abt. IV.
— Math. G. s. Astronomie u. Erdkunde Abt. IV.
Geologie, Allgemeine. V. Geh. Bergr. Prof. Dr. Fr. Frech. 6 Bde. (Bd. 207/211 u. Bd. 61.) I.: Vulkane einst und jetzt. 3. Aufl. M. Titelbild u. 78 Abb. II.: Gebirgsbau und Erdbeben. 3., wes. erw. Aufl. M. Titelbild u. 57 Abb. III.: Die Arbeit des fließenden Wassers. 3. Aufl. M. 56 Abb. IV.: Die Bodenbildung. Mittelgebirgsformen u. Arbeit des Ozeans. 3., wes. erw. Aufl. Mit 1 Titelbild u. 66 Abb. V. Steinkohle, Wüsten u. Klima der Vorzeit. 3. Aufl. Mit 39 Abb. VI. Gletscher einst u. jetzt. 3. Aufl. Mit 46 Abb. im Text.
— s. a. Kohlen, Salzlagerstätt. Abt. VI.
Geometrie. Analyt. G. d. Ebene z. Selbstunterricht. Von Prof. W. Crantz. 2. Aufl. Mit 55 Fig. (Bd. 504.)
— **Geometr. Zeichnen.** Von Zeichenlehrer A. Schubeisky. (Bd. 568.)
— s. a. Mathematik.
Geomorphologie s. Allgem. Erdkunde.
Geschlechtskrankheiten, Die, ihr Wesen, ihre Verbreitg., Bekämpfg. u. Verhütg. Für Gebildete aller Stände bearb. v. Generalarzt Prof. Dr. W. Schumburg. 4. A. Mit 4 Abb. u. 1 mehrfarb. Taf. (231.)
Geschlechtsunterschiede s. Fortpflanzung.
Gesundheitslehre. Von Obermed.-Rat Prof. Dr. M. v. Gruber. 4. Aufl. Mit 26 Abbildungen. (Bd. 1.)
— **G. für Frauen.** Von Dir. Prof. Dr. K. Baisch. 2. Aufl. M. 11 Abb. (538.)
— s. a. Abwehrkräfte, Bakterien, Leibesüb.
Graph. Darstellung, Die. V. Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. 2. Aufl. Mit 139 Figuren. (Bd. 437.)
Haushalt siehe Bakterien, Chemie, Desinfektion, Naturwissenschaften, Physik.
Haustiere, Die Stammesgeschichte unserer H. Von Prof. Dr. C. Keller. 2. Aufl. Mit 29 Figuren. (Bd. 252.)
— s. a. Kleintierzucht, Tierzüchtg. Abt. VI.
Herz, Blutgefäße und Blut und ihre Erkrankungen. Von Prof. Dr. H. Rolly. Mit 18 Abb. (Bd. 312.)
Hygiene s. Schulhygiene, Stimme.
Hypnotismus und Suggestion. Von Dr. E. Trömner. 3. Aufl. (Bd. 199.)
Immunitätslehre s. Abwehrkräfte d. Körp.
Infinitesimalrechnung. Einführung in die I. Von Prof. Dr. G. Kowalewski. 3. Aufl. Mit 19 Fig. (Bd. 197.)
Integralrechnung mit Aufgabensammlung. V. Studienrat Dr. M. Lindow. 2. Aufl. Mit Fig. (Bd. 673.)
Kalender, Der. Von Prof. Dr. W. F. Wislicenus. 2. Aufl. (Bd. 69.)
Kälte, Die. Wesen, Erzeug. u. Verwert. Von Dr. H. Alt. 45 Abb. (Bd. 311.)
Kinematographie s. Abt. VI.
Konservierung siehe Desinfektion.
Korallen u. and. gesteinbild. Tiere. V. Prof. Dr. W. May. Mit 45 Abb. (Bd. 231.)
Kosmetik. Ein kurzer Abriß der ärztlichen Verschönerungskunde. Von Dr. J. Sauder. Mit 10 Abb. im Text. (Bd. 489.)
Lebewesen, Die Beziehungen der Tiere und Pflanzen zueinander. Von Prof. Dr. K. Kraepelin. 2. Aufl. I. Der Tiere zueinander. M. 64 Abb. II. Der Pf[illegible]zen zueinander u. zu d. Tieren. 68 Abb. (Bd. 426/
— s. a. Biologie, Organismen, Schädl
Leib und Seele. Von Dr. phil. et me Sommer. (Bd.
Leibesübungen, Die, und ihre Bedeu für die Gesundheit. Von Prof. Dr Sander. 4. Aufl. M. 20 Abb.
— s. auch Turnen.

Licht. Das, u. d. Farben. Einführung in die Optik. Von Prof Dr S. Graetz. 4. Aufl. Mit 100 Abb. (Bd. 17.)
Luft, Wasser, Licht und Wärme. Neun Vorträge aus d. Gebiete d. Experimentalchemie. V. Geh. Reg.-Rat Dr. R. Blochmann. 4 Aufl. M. 115 Abb. (Bd. 5.)
Luftstickstoff. D., u. s. Verwertg. V. Prof. Dr. K. Kaiser. 2. A. M. 13 Abb. (313.)
Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)
Materie. Das Wesen d. M. V. Prof. Dr. G. Mie. I. Moleküle und Atome. 4. A. Mit 25 Abb. II. Weltäther und Materie. 4. Aufl. Mit Fig. (Bd. 58/59.)
Mathematik. Einführung in die Mathematik. Von Oberlehrer W. Mendelssohn. Mit 42 Fig. (Bd. 503.)
— **Math. Formelsammlung.** Ein Wiederholungsbuch der Elementarmathematik. Von Prof Dr S. Jakobi. (Bd 567.)
— **Naturwissensch. u. M. i. klass. Altertum.** Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. Mit 2 Fig (Bd. 370.)
— **Praktische M.** Von Prof. Dr. R. Neuendorff. I. Graphische Darstellungen. Verkürztes Rechnen. Das Rechnen mit Tabellen. Mechanische Rechenhilfsmittel. Kaufmännisches Rechnen i. tägl. Leben. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2., verb. A. M. 29 Fig. i. T. u. 1 Taf II. Geom. Zeichnen. Projektionsl. Flächenmessung. Körpermessung M 133 Fig. (341. 526.)
— **Mathemat. Spiele.** V. Dr. W. Ahrens. 3. Aufl. M. Titelb. u. 77 Fig. (Bd. 170.)
— s. a. Arithmetik, Differentialrechnung, Geometrie, Infinitesimalrechnung, Integralrechnung, Perspektive, Planimetrie, Projektionslehre, Trigonometrie, Vektorrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Mechanik. Von Prof. Dr. Hamel. 3 Bde. I. Grundbegriffe der M. II. M. d. festen Körper. III M. d. flüss. u. luftförm. Körper (Bd. 684/686.)
— **Aufgaben aus d. techn. Mechanik** für den Schul- u. Selbstunterricht. V. Prof. R. Schmitt. I. Bewegungsl., Statik. 156 Aufg. u. Lös. II. Dynamik. 140 Aufg. u. Lös. m. zahlr. Fig. i. T. 658/559.)
— s. a. auch Statik.
Meer. Das M., s. Erforsch. u. s. Leben. Von Pri. Dr. O. Janson. 3. A. M 40 Fig. (Bd. 30.)
Mensch u. Erde. Skizzen v. d. Wechselbezieh. zwischen beiden Von Geh. Rat Prof. Dr. A. Kirchhoff. 4. Aufl. (Bd. 31.)
ie Rassen der Menschen. Von Prof. E. Fischer. (Bd. 624.)
iszeit, Entwicklungsgesch. Urzeit.
Natur u Mensch siehe Natur
chl. Körper. Bau u. Tätigkeit d. menschl. Einführ i. d. Physiol. d. M. V. Prof. b Sachs 4. Aufl. M 34 Abb. (32.)
auch Anatomie, Arbeitsleistungen, e. Blut, Fortpflanzg., Gebiß. Herz, enspstem. Physiol., Sinne. Verbild.
Mikroskop. Das. V. Prof. Dr. W. Scheffer. 2. Aufl. Mit 99 Abb. (Bd. 35.)
Moleküle s. Materie.
Mond. Der. Von Prof. Dr. J. Franz. 2. Aufl. Mit 34 Abb. (Bd. 90.)
Nahrungsmittel s. Ernährung u. N.
Natur u. Mensch. V. Direkt. Prof. Dr. M. G. Schmidt. Mit 19 Abb. (Bd. 458.)
Naturlehre. Die Grundbegriffe der modernen N. Einführung in die Physik. Von Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. 4. Aufl Mit 71 Fig. (Bd. 40.)
Naturphilosophie. Die mod. V Privatdoz. Dr. J. M Verweyen. 2. A. (Bd. 491.)
Naturwissenschaft. Religion und N. in Kampf u. Frieden. Ein geschichtl. Rückblick V Pfarrer Dr. A. Pfannkuche. 2. Aufl. (Bd. 141.)
— N. und Technik. Am sausenden Webstuhl d. Zeit. Übersicht üb. d. Wirkungen d. Naturw. u. Technik a. d. ges. Kulturleben. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. W. Launhardt. 3. Afl. M. 3 Abb. (23.)
— N. u. Math. i. klass. Altert. V. Prof. Dr. J. L. Heiberg. 2 Fig. (Bd. 370.)
Nerven. Vom Nervensystem, sein Bau u. sein. Bedeutung für Leib u. Seele im gesund u. krank. Zustande. V. Prof. Dr. R. Sander. 3. Aufl. M. 27 Abb. (Bd. 48.)
— siehe auch Anatomie.
Optik. Die opt. Instrumente. Lupe, Mikroskop, Fernrohr, photogr. Objektiv u. ihnen verwandte Instr. V. Prof. Dr. M. v. Rohr. 3. Aufl. M. 89 Abb. (88.)
— s. a. Auge, Brille, Kinemat., Licht u. Farbe. Mikrosk., Spektroskopie, Strahlen.
Organismen. D. Welt d. O. In Entwickl. und Zusammenhang dargestellt. Von Oberstudienrat Prof. Dr. K. Lambert. Mit 52 Abb. (Bd. 236.)
— siehe auch Lebewesen.
Paläontologie siehe Tiere der Vorwelt.
Perspektive. Die. Grundzüge d. P. nebst Anwendg. V. Prof. Dr. K. Doehlemann. Mit 91 Fig u. 11 Abb. (Bd 510.)
Pflanzen. Die fleischfress. Pfl. V. Prof. Dr. A. Wagner. Mit 82 Abb. (Bd 344.)
— Unsi. Blumen u. Pfl. i. Garten. V. Prof. Dr. U. Dammer. M. 69 Abb. (Bd. 360.)
— Unsi. Blumen u. Pfl. i. Zimmer. V. Prof. Dr U Dammer. M. 65 Abb. (Bd 359.)
— s. auch Botanik, Garten, Lebewesen, Pilze, Schädlinge.
Pflanzenphysiologie. V. Prof. Dr. H. Molisch. Mit 63 Fig. (Bd. 569.)
Photochemie. Von Prof. Dr. G. Kümmell. 2. Aufl. Mit 23 Abb. i. Text u. a. 1 Taf. (Bd. 227.)
Photographie s. Abt. VI.
Physik. Werdegang d. mod. Ph. V Oberl. Dr. H. Keller. 2. Afl. M. Fig. (343.)
— **Experimentalphysik.** Gleichgewicht u. Bewegung. Von Geh. Reg.-Rat. Prof. Dr. R. Börnstein. M. 90 Abb. (371.)

Physik. Ph. i. Küche u. Haus. B. Studienr. H. Speitkamp M. 51 Abb. (Bd. 478.)
— **Große Physiker.** Von Prof. Dr. F. A. Schulze. 2 Aufl. Mit 6 Bildn. (324.)
— s. auch Energie, Naturlehre, Optik, Relativitätstheorie, Wärme; ebenso Elektrotechnik Abt. VI.
Physiologie. Ph. d. Menschen. V. Privatdoz. Dr. A. Lipschütz. 4 Bde. I: Allgem. Physiologie. II: Physiologie d. Stoffwechsels. III: Ph. d. Atmung, d. Kreislaufs u. d. Ausscheidung. IV: Ph. der Bewegungen und der Empfindungen. (Bd 527—530.)
— siehe auch Arbeitsleistungen. Menschl. Körper. Pflanzenphysiologie.
Pilze, Die. Von Dr. A. Eichinger. Mit — s. a. Bakterien. [64 Abb. (Bd. 334.)
Planeten, Die. Von Prof. Dr. B. Peter. 2. Aufl. Von Dr. H. Naumann. Mit Figuren. (Bd. 240.)
Planimetrie z. Selbstunterricht. V. Prof. V. Cranz. 2. Aufl. M. 94 Fig. (340.)
Praktische Mathematik s. Mathematik.
Projektionslehre. In kurzer leichtfaßlicher Darstellung f. Selbstunterr. u. Schulgebr. Von Zeichenl. A. Schubeitsky. Mit 208 Fig. im Text. (Bd. 564.)
Radium, Das, u. d. Radioaktivität. V. Dr. M. Centnerszwer. 2. Aufl. M. 33 Abb.
Rassen s. Mensch. [(Bd. 405.)
Rechenmaschinen, Die, und das Maschinenrechnen. Von Reg.-Rat Dipl.-Ing. K. Lenz. Mit 43 Abb. (Bd. 490.)
Relativitätstheorie. Einführung in die. M. 16 Fig. V. Dr. W. Blasch (Bd. 618.)
Röntgenstrahlen, D. N. u. ihre Anwendg. V. Dr. med. G. Buck. M. 85 Abb. i. T. u. auf 4 Tafeln. (Bd. 556.)
Säuglingspflege. Von Dr. E. Kobrak. Mit 20 Abb. (Bd. 154.)
Schachspiel, Das, und seine strategischen Prinzipien. V. Dr. M. Lange. 3. Aufl. Mit 2 Bildn., 1 Schachbrettafel u. 43 Diagrammen. (Bd. 281.)
— **Die Hauptvertreter der Schachspielkunst u. d. Eigenart ihrer Spielführung.** Von Dr. M. Lange. (Bd. 531.)
Schädlinge, Die, im Tier- u. Pflanzenreich u. i. Bekämpf. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. K. Eckstein. 3. A. M. 36 Fig. (18.)
Schulhygiene. Von Prof. Dr. L. Burgerstein. 3. Aufl. Mit 43 Fig. (Bd. 96.)
Sexualbiologie s. Fortpflanzung. Pflanzen.
Sexualethik. V. Prof. Dr. H. E. Timerding. (Bd. 592.)
Sinne d. Mensch., D. Sinnesorgane u. Sinnesempfindungen V. Hofrat Prof. Dr. J. Kreibig. 3. Aufl. M. 30 Abb. (27.)
Sonne, Die. Von Dr. A. Krause. Mit 64 Abb. (Bd. 357.)
Spektroskopie. Von Dr. L. Grebe. 2. Aufl. Mit Abbild. (Bd. 284.)
Spiel siehe Mathem. Spiele, Schachspiel.
Sprache. Die menschliche Sprache. (Ihre Entwicklung beim Kinde, ihre Gebrechen und deren Heilung.) Von Lehrer K. Nickel. (Bd. 586.)
— siehe auch Rhetorik, Sprache Abt III.
Statik. Mit Einschluß der Festigkeitslehre. V. Baugewerkschuldirektor Reg.-Baum. A. Schau. Mit 149 Fig. i. T. (Bd. 497.)
— siehe auch Mechanik.
Sterilisation siehe Desinfektion.
Stickstoff s. Luftstickstoff.
Stimme. Die menschliche St. und ihre Hygiene. Von Geh. Med.-Rat Prof. Dr. H. H. Gerber. 3., verb. Aufl. Mit 21 Abb. (Bd. 136.)
Strahlen, Sichtbare u. unsichtb. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Börnstein u. Prof. Dr. W. Marckwald. 3. Aufl. v. Prof. Dr. E. Regener. M. zahlr. Abb. (Bd. 64.)
Suggestion. Hypnotismus und Suggestion. V. Dr. E. Trömner. 3. Aufl. (Bd. 199.)
Süßwasser-Plankton, Das. V. Prof. Dr. O. Zacharias. 2. A. 57 Abb. (Bd. 156.)
Tabak, Der. Von Jak. Wolf. 2. Aufl. Mit 17 Abb. i. T. (Bd. 416.)
Thermodynamik i. Abt. VI.
Tiere. T. der Vorwelt. Von Prof. Dr. O. Abel. Mit 31 Abb. (Bd. 399.)
— **Die Fortpflanzung der T.** V. Prof. Dr. R. Goldschmidt. Mit 77 Abb. (Bd. 253.)
— **Tierkunde. Eine Einführung in die Zoologie.** Von Privatdozent Dr. K. Hennings. Mit 34 Abb. (Bd. 142.)
— **Lebensbedingungen und Verbreitung der Tiere.** Von Prof. Dr. O. Maas. Mit 11 Karten und Abb. (Bd. 139.)
— **Zwiegestalt der Geschlechter in der Tierwelt (Dimorphismus).** Von Dr. Fr. Knauer. Mit 37 Fig. (Bd. 148.)
— s. auch Aquarium, Bakterien, Bienen, Haustiere, Korallen, Lebewesen, Schädlinge, Urtiere, Vogelleben, Vogelzug, Wirbeltiere.
Tierzucht siehe Abt. VI: Kleintierzucht, Tierzüchtung.
Trigonometrie, Ebene, z. Selbstunterr. V. Studienr. V. Cranz. 2. A. M. 50 Fig. (Bd. 431.)
— **Sphärische Tr.** V. Studienr. V. Cranz. (Bd. 605.)
Tuberkulose. Die, Wesen, Verbreitung, Ursache, Verhütung und Heilung. Von Generalarzt Prof. Dr. W. Schumburg. 3. Aufl. M. 1 Taf. u. 8 Fig. (Bd.
Turnen. Von Oberl. F. Eckardt. 1 Bildnis Jahns. (Bd.
— s. auch Leibesübungen, Anthropologie des Menschen Bd. VI.
Urtiere, Die. Einführung i. d. Wissen vom Leben. Von Prof. Dr. R. Goldschmidt. 2. A. M. 44 Abb. (

Urzeit. Der Mensch d. U. Vier Vorlesung. aus der Entwicklungsgeschichte des Menschengeschlechts. Von Dr. A. Heilborn. 3. Aufl. Mit 47 Abb. (Bd. 62.)
Vektorrechnung. Einführung in die V. Von Prof. Dr. G. Jung. (Bd. 668.)
Verbildungen. Körperliche, im Kindesalter u. ihre Verhütung. Von Dr. M. David. Mit 26 Abb. (Bd. 321.)
Vererbung. Exp. Abstammgs.- u. V.-Lehre. Von Prof. Dr. E. Lehmann. Mit 20 Abbildungen. (Bd. 379.)
— **Geistige Veranlagung u. V.** Von Dr. phil. et med. G. Sommer. 2. Aufl. (512.)
Vogelleben, Deutsches. Zugleich als Exkursionsbuch für Vogelfreunde. Von Prof. Dr. A. Voigt. 2. Aufl. (Bd. 221.)
Vogelzug und Vogelschutz. Von Dr. W. M. Eckardt. Mit 6 Abb. (Bd. 218.)
Wahrscheinlichkeitsrechnung. Einführ. in die. Von Prof. Dr. K. Suppantschitsch. (Bd. 586.)
Wald. Der deutsche. Von Prof. Dr. H. Hausrath. 2 Aufl. M. Bilderanh. u. 2. Karten.
— siehe auch Holz Abt. VI. (Bd. 153.)
Wärme. Die Lehre v. d. W. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Börnstein. Mit Abb. 2. Aufl. v. Prof. Dr. A. Wigand. (172.)
— s. a. Luft. Wärmekraftmasch., Wärmelehre, techn. Thermodynamik Abt. VI.
Wasser. Das. Von Geh. Reg.-Rat Dr. O. Anselmino. Mit 44 Abb. (Bd. 291.)
Weidwerk. Deutsche. Von Forstmstr. G. Frhr. v. Nordenflycht. M. Titelb. (Bd. 436.)
Weltall. Der Bau des W. Von Prof. Dr. J. Scheiner 4. A. M. 26 Fig. (Bd. 24.)
Weltäther s. Materie.
Weltbild. Das astronomische W. im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. 2 Aufl. Mit 19 Abb. (Bd. 110.)
— siehe auch Astronomie.
Weltentstehung. Entstehung d. W. u. d. Erde nach Sage u. Wissensch. Von Prof. Dr. M. W. Meinstein. 3. Aufl. (Bd. 223.)
Weltuntergang. Untergang der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von Prof. Dr. M. W. Weinstein. (Bd. 470.)
Wetter. Unser W. Einführ. i. d. Klimatol. Deutschl. Von Dr. R. Henning. 2. Aufl. Mit 14 Abb. (Bd. 349.)
— **Einführung in die Wetterkunde.** Von Prof. Dr. H. Weber. 3. Aufl. Mit 28 Abb. u. 3 Taf. (Bd. 55.)
Wirbeltiere. Vergleichende Anatomie der Sinnesorgane der W. Von Prof. Dr. W. Lubosch. Mit 107 Abb. (Bd. 282.)
Zahnheilkunde siehe Gebiß.
Zellen- und Gewebelehre siehe Anatomie des Menschen. Biologie.
Zoologie s. Abstammungsl., Aquarium, Bienen, Biologie, Schädlinge, Tiere, Urtiere, Vogelleben, Vogelzug, Weidwerk, Wirbeltiere.

VI. Recht, Wirtschaft und Technik.

Agrikulturchemie. Von Dr. W. Krische. Mit 21 Abb. (Bd. 314.)
Angestellte siehe Kaufmännische A.
Antike Wirtschaftsgeschichte. V. Priv.-Doz. Dr. O. Neurath. 2., umgearb. A. (258.)
— siehe auch Antikes Leben Abt. IV.
Arbeiterschutz und Arbeiterversicherung. V. Geh. Hofrat Prof. Dr. C. v. Zwiedineck-Südenhorst. 2. Aufl. (78.)
Arbeitsleistungen des Menschen, Die. Einführ. in d. Arbeitsphysiologie. V. Prof. Dr. H. Boruttau. M. 14 Fig. (Bd. 589.)
— **Berufswahl, Begabung u. A. in ihren gegenseitigen Beziehungen.** Von W. J. Ruttmann. Mit 7 Abb. (Bd. 522.)
Arzneimittel und Genußmittel. Von Prof. Dr. O. Schmiedeberg. (Bd. 363.)
Arzt. Der. Seine Stellung und Aufgaben im Kulturleben der Gegenw. Von Dr. med. M. Fürst. 2. Aufl. (Bd. 265.)
Automobil. Das. Eine Einf. in d. Bau d. Personen-Kraftwagens. V. Ob.-Ing. Slaby. 3., überarb. Aufl. M. 98 Abb. Titelbild. (Bd. 166.)
...nde s. Eisenbetonbau.
...kunst siehe Abt. III.
...tungswesen. Das moderne. Von Dr. H. Lux. M. 54 Abb. (Bd. 433.)
...u. Von Bergassessor F. W. Wedding. (Bd. 467.)
Bewegungslehre s. Mechan., Aufg. a. d. M.
Bierbrauerei. Von Dr. A. Bau. Mit 47 Abb. (Bd. 333.)
Bilanz s. Buchhaltung u. B.
Blumen. Uns. Bl. u. Pfl. i. Garten. Von Prof. Dr. R. Dammer. M. 69 Abb. (360.)
— **Uns. Bl. u. Pfl. i. Zimmer.** V. Prof. Dr. U. Dammer. M. 65 Abb. (Bd. 359.)
— siehe auch Garten.
Brauerei s. Bierbrauerei.
Buch. Wie ein B. entsteht. V. Prof. A. W. Unger. 4. Aufl. M. 7 Taf. u. 26 Abb. im Text. (Bd. 175.)
— s. a. Schrift- u. Buchwesen Abt. IV.
Buchhaltung u. Bilanz. Kaufm.- und ihre Beziehungen z. buchhalter. Organisation, Kontrolle u. Statistik. V. Dr. P. Gerstner. 2. Aufl. M. 4 schemat. Darst. (507.)
Chemie in Küche und Haus. Von Dr. J. Klein. 4. Aufl. (Bd. 76.)
— s. auch Agrikulturchemie, Elektrochemie, Farben, Sprengstoffe, Technik; ferner Chemie Abt. V.
Dampfkessel siehe Feuerungsanlagen.
Dampfmaschine, Die. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2 Bde. I: Wirkungsweise des Dampfes im Kessel und in der Maschine. 4. Aufl. M. 37 Abb. (Bd. 393.) II: Ihre Gestaltung und Verwendung. 2. Aufl. Mit 105 Abb. (Bd. 394.)

Desinfektion, Sterilisation und Konservierung. Von Reg.- und Med.-Rat Dr. O. Selbrig. Mit 20 Abb. (Bd. 491.)
Deutsch f. Handel, Handwerk, Landwirtschaft, Verfassung, Weidwerk, Wirtschaftsleben, Zivilprozeßrecht; Reich Abt. IV.
Drähte u. Kabel, ihre Anfertig. u. Anwend. i. d. Elektrotech. V. Tel.-Insp. H. Brick. 2. Aufl. M. 43 Abb. (Bd. 285.)
Dynamik s. Mechanik, Aufg. a. d. M. 2. Bd., ebenso Thermodynamik.
Eisenbahnwesen, Das. Von Eisenbahnbau- u. Betriebsinsp. a. D. Dr.-Ing. E. Biedermann. 3. A. M. zahlr. Abb. (144.)
Eisenbetonbau, Der. V. Dipl.-Ing. E. Haimovici. 2. Aufl. Mit 82 Abb. i. T. sowie 6 Rechnungsbeisp. (Bd. 275.)
Eisenhüttenwesen, Das. Von Geh. Bergr. Prof. Dr. H. Wedding. 5. Aufl. v. Bergass. F. W. Wedding. M. 22 Abb. (20.)
Elektrische Kraftübertragung, Die. V. Ing. P. Köhn. Mit 137 Abb. (Bd. 424.)
Elektrochemie. Von Prof. Dr. K. Arndt. Mit 37 Abb. (Bd. 234.)
Elektrotechnik. Grundlagen d. E. V. Obering. A. Rotth. 2. Aufl. M. 74 Abb. (391.)
— s. auch Drähte u. Kabel, Telegraphie.
Erbrecht. Testamentserrichtung und E. Von Prof. Dr. F. Leonhard. (Bd. 429.)
Ernährung u. Nahrungsmittel s. Abt. V.
Farben u. Farbstoffe. I. Erzeug. u. Verwend. V. Dr. A. Zart. 31 Abb. (Bd. 483.)
— siehe auch Licht Abt. V.
Fernsprechtechnik s. Telegraphie.
Feuerungsanlagen, Industr., u. Dampfkessel. V. Ing. F. E. Mayer. 38 Abb. (Bd. 348.)
— siehe auch Geldwesen.
Funkentelegraphie siehe Telegraphie.
Fürsorge s. Kinderf., Kriegsbeschädigtenf.
Garten. Der Kleingarten. V. Redakt. Joh. Schneider. 2. Aufl. M. 80 Abb. (498.)
— Der Hausgarten. Von Gartenarchitekt W. Schubert. Mit Abb. (Bd. 502.)
— siehe auch Blumen.
Gartenkunst. Gesch. d. G. V. Baurat Dr.-Ing. Chr. Ranck. M. 41 Abb. (Bd. 274.)
Gartenstadtbewegung, Die. Von Landeswohnungsinspektor Dr. H. Kampffmeyer. 2. Aufl. M. 43 Abb. (Bd. 259.)
Gefängniswesen s. Verbrechen.
Geldwesen, Zahlungsverkehr u. Vermögensverwalt. Von G. Maier. 2. Aufl. (398.)
— s. a. Finanzwissensch.; Münze Abt. IV.
Genußmittel siehe Arzneimittel und Genußmittel, Tabak.
Gewerblicher Rechtsschutz i. Deutschland. V. Patentanw. V. Tolkdorf. (Bd. 138.)
— siehe auch Urheberrecht.
Graphische Darstell., Die. V. Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. 2. A. M. 139 Abb. (437.)
Handel. Geschichte d. Welth. Von Realgymnasialdirektor Prof. Dr. M. G. Schmidt. 3. Aufl. (Bd. 118.)
Handel. Geschichte d. deutsch. Handels seit d. Ausgang des Mittelalters. Von Dir. Prof. Dr. W. Langenbeck. 2. Aufl. Mit 16 Tafeln. (Bd. 237.)
Handfeuerwaffen, Die. Entwickl. u. Techn. V. Major R. Weiß. 69 Abb. (Bd. 364.)
Handwerk, D. deutsche, in s. kulturgeschichtl. Entwicklg. V. Geh. Schulr. Dr. E. Otto. 4. Aufl. M. 33 Abb. auf 12 Taf. (Bd. 14.)
Haushalt s. Chemie, Desinfekt., Physik; Nahrungsm. Abt. IV; Bakter. Abt. V.
Häuserbau siehe Baukunde, Beleuchtungswesen, Heizung u. Lüftung, Wohnungsw.
Hebezeuge. Hilfsmittel zum Heben fester, flüssiger und gasf. Körper. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2. Aufl. M. 67 Abb. (Bd. 196.)
Heizung und Lüftung. Von Ingenieur J. E. Mayer. Mit 40 Abb. (Bd. 241.)
Holz. Das H., seine Bearbeitung u. seine Verwendg. V. Insp. F. Großmann. Mit 39 Originalabb. i. T. (Bd. 473.)
Hotelwesen, Das. Von V. Dammetienne. Mit 30 Abb. (Bd. 331.)
Hüttenwesen siehe Eisenhüttenwesen.
Immunitätslehre s. Abwehrkräfte Abt. V.
Ingenieurtechnik. Schöpfungen d. I. der Neuzeit. Von Geh. Regierungsrat M. Geitel. Mit 32 Abb. (Bd. 28.)
Instrumente siehe Optische I.
Kabel s. Drähte und K.
Kälte, Die, ihr Wesen, i. Erzeug. u. Verwerty. V. Dr. H. Alt. M. 45 Abb. (311.)
Kaufmann. Das Recht des K. Ein Leitfaden f. Kaufleute, Studier. u. Juristen. V. Justizrat Dr. M. Strauß. (Bd. 409.)
Kaufmännische Angestellte, D. Recht d. k. A. V. Justizr. Dr. M. Strauß. (361.)
Kinderfürsorge. Von Prof. Dr. Chr. J. Klumker. (Bd. 620.)
Kinematographie. Von Dr. H. Lehmann. 2. Aufl. V. Dr. W. Mertens. Mit Abb. (Bd. 358.)
Klein- u. Straßenbahnen, Die. V. Obering. a. D. Oberlehrer A. Liebmann. Mit 85 Abb. (Bd. 322.)
Kleintierzucht, Die. Von Redakt. Joh. Schneider. M. 59 Fig. i. T. u. a. 6 Taf.
— siehe auch Tierzüchtung. (Bd. 604.)
Kohlen, Unsere. V. Bergass. W. Kukuk. Mit 60 Abb. i. Text u. 3 Taf. (Bd. 396.)
Kolonialbotanik. Von Prof. Dr. F. Tobler. Mit 21 Abb. (Bd. 184.)
Kolonisation, Innere. Von A. Brening. (Bd. 261.)
Konservierung siehe Desinfektion
Konsumgenossenschaft, Die. Von Dr. F. Staudinger. (Bd.
— s. auch Mittelstandsbewegung, schaftliche Organisationen.
Kraftanlagen siehe Dampfmaschine, rungsanlagen und Dampfkessel. W kraftmaschine, Wasserkraftmaschine

Kraftübertragung. Die elekt. V. Ing. P. Köhn. 2. Aufl. M. Abb. (Bd. 424.)
Krieg. Kulturgeschichte d. K. V. Prof. Dr. K. Beule, Geh. Hofrat Prof. Dr. E. Bethe, Prof. Dr. B. Schmeidler, Prof. Dr. A. Doren, Prof. D. B. Herre. (Bd. 561.)
Kriegsbeschädigtenfürsorge. In Verbindung mit Med.-Rat, Oberstabsarzt u. Chefarzt Dr. Rebentisch, Gewerbeschuldir. H. Wack, Direktor des Städt. Arbeitsamts Dr. B. Schlotter hersg. v. Prof. Dr. G. Kraus, Leit. d. Städt. Fürsorgeamts für Kriegshinterblieb. in Frankfurt a. M. M. 2 Abbildgst. (523.)
Kriegsschiffe, Unsere. Ihre Entstehg. u. Verwendg. V. Geh. Marinebaur. a. D. E. Krieger. 2. Aufl. v. Marinebaur. Fr. Schürer. Mit 62 Abb. (339.)
Kriminalistik, Moderne. Von Amtsrichter Dr. A. Hellwig. M. 18 Abb. (Bd. 476.)
— s. a. Verbrechen, Verbrecher.
Küche siehe Chemie in Küche und Haus.
Landwirtschaft, Die deutsche. V. Dr. W. Claaßen. 2. Aufl. Mit 15 Abb. u. 1 Karte. (Bd. 215.)
— s. auch Agrikulturchemie, Kleintierzucht, Luftstickstoff, Tierzüchtung; Haustiere, Tierkunde Abt. V.
Landwirtschaftl. Maschinenkunde. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. G. Fischer. 2. Aufl. Mit 64 Abbildungen. (Bd. 316.)
Luftfahrt, Die, ihre wissenschaftlichen Grundlagen und ihre technische Entwicklung. Von Dr. R. Nimführ. 3. Aufl. v. Dr. Fr. Huth. M. 60 Abb. (Bd. 300.)
Luftstickstoff, Der, u. s. Verw. V. Prof. Dr. K. Kaiser. 2. A. M. 13 Abb. (313.)
Lüftung, Heizung und. Von Ingenieur F. E. Mayer. Mit 40 Abb. (Bd. 241.)
Marx, Karl. Versuch e. Einführung. V. Prof. Dr. R. Wilbrandt. 2. A. (621.)
— s. auch Sozialismus.
Maschinen s. Dampfmaschine, Hebezeuge, Landwirtsch. Maschinenkunde, Wärmekraftmasch., Wasserkraftmasch.
Maschinenelemente. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 3. A. M. 175 Abb. (Bd. 301.)
Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abb. (Bd. 285.)
Mechanik. V. Prof. Dr. G. Hamel. 3 Bde. I. Grundbegriffe d. M. II. M. der festen Körper. III. M. d. flüss. u. luftförm. Körper. (Bd. 684/686.)
— Aufgaben aus der technischen M. f. d. Schul- u. Selbstunterr. V. Prof. Schmitt. M. zahlr. Fig. I. Beweisst., Statik. 156 Aufg. u. Lösungen. Dynam. 140 A. u. Lös. (Bd. 558/559.)
Messen siehe Maße und Messen.
Miete, Die, nach d. BGB. Ein Handbüchlein f. Juristen, Mieter u. Vermieter. Justizrat Dr. M. Strauß. (194.)
Mikroskop, Das. V. Prof. Dr. W. Scheffer. 2. Aufl. M. 99 Abb. (Bd. 35.)
Milch, Die, und ihre Produkte. Von Dr. A. Reiß. Mit 16 Abb. (Bd. 362.)
Mittelstandsbewegung. Die moderne. Von Dr. S. Müffelmann. (Bd. 417.)
— siehe Konsumgenossen., Wirtschaftl. Org.
Nahrungsmittel s. Abt. V.
Naturwissensch. u. Technik. Am sausenden Webstuhl d. Zeit. Übers. üb. d. Wirkungen d. Entw. d. N. u. T. a. d. gesamte Kulturleb. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. W. Launhardt. 3. Aufl. Mit 3 Abb. (Bd. 23.)
Nautik. V. Dir. Dr. J. Möller. 2. Aufl. Mit vielen Abb. (Bd. 255.)
Optischen Instrumente, Die. Auge, Mikroskop, Fernrohr, photogr. Objektiv u. ihnen verw. Instr. Von Prof. Dr. M. v. Rohr. 3. Aufl. M. 89 Abb. (Bd. 88.)
Organisationen, Die wirtschaftlichen. Von Prof. Dr. E. Leberer. (Bd. 428.)
Ostmark, Die. Eine Einführ. i. d. Probleme ihrer Wirtschaftsgesch. Hrsg. von Prof. Dr. W. Mitscherlich. (Bd. 551.)
Patente u. Patentrecht s. Gewerbl. Rechtssch.
Perpetuum mobile, Das. V. Dr. Fr. Ischak. Mit 38 Abb. (Bd. 462.)
Photochemie. Von Prof. Dr. G. Kümmell. 2. Aufl. Mit 23 Abb. u. Text u. auf 1 Tafel. (Bd. 227.)
Photographie, Die, ihre wissenschaftlichen Grundlagen u. i. Anwendung. V. Dr. O. Prelinger. 2. Aufl. Mit Abb. (414.)
— **Die künstlerische Ph.** Ihre Entwicklung, ihre Probleme, ihre Bedeutung. Von Dr. W. Warstat. 2., verb. Aufl. Mit Bilderanh. (Bd. 410.)
— **Angewandte Liebhaber-Photographie,** ihre Technik und ihr Arbeitsfeld. Von Dr. W. Warstat. Mit Abb. (Bd. 535.)
Physik in Küche und Haus. Von Prof. Dr. H. Spethmann. M. 51 Abb. (Bd. 478.)
— siehe auch Physik in Abt. V.
Postwesen, Das. Von Oberpostrat O. Sieblist. 2. Aufl. (Bd. 182.)
Rechenmaschinen, Die, und das Maschinenrechnen. Von Reg.-Rat Dipl.-Ing. K. Lenz. Mit 43 Abb. (Bd. 490.)
Recht siehe Erbrecht, Gewerbl. Rechtsschutz, Kaufm. Angest., Kriminalistik, Urheberrecht, Verbrechen, Verfassungsrecht, Zivilprozeßrecht.
— **Rechtsfragen des täglichen Lebens in Familie und Haushalt.** Von Justizrat Dr. M. Strauß. (Bd. 219.)
Rechtsprobleme, Moderne. V. Geh. Justizr. Prof. Dr. J. Kohler. 2. Aufl. (Bd. 128.)
Salzlagerstätten, Die deutschen. Ihr Vorkommen, ihre Entstehung und die Verwertung ihrer Produkte in Industrie und Landwirtschaft. Von Dr. C. Riemann. Mit 27 Abb. (Bd. 407.)
— siehe auch Geologie Abt. V.
Schiffbau siehe Kriegsschiffe.
Schmuckst., Die, u. d. Schmucksteinindustr. V. Dr. A. Eppler. M. 64 Abb. (Bd. 376.)

Revolution. Geschichte der Französ. R. V. Prof. Dr. Th. Bitterauf. 2. Aufl. Mit 8 Bildn. (Bd. 346.)
— 1848. 6 Vorträge. Von Prof. Dr. O. Weber. 3. Aufl. (Bd. 53.)
Rom. Das alte Rom. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. O. Richter. Mit Bilderanhang u. 4 Plänen (Bd. 386.)
— Die römische Republik. Von Privatdoz. Dr. A. Rosenberg. (Bd. 719.)
— Soziale Kämpfe i. alt. Rom. V. Privatdozent Dr. L. Bloch. 3. Aufl. (Bd. 22.)
— Roms Kampf um die Weltherrschaft. Von Geh. Hofrat Prof. Dr. J. Kromayer. (Bd. 368.)
Geschichte der Römer. Von Prof. Dr. R. v. Scala. (Bd. 578.)
— siehe auch Hellenist.-röm. Religionsgeschichte Abt. I: Pompeji Abt. III.
Rußland. Geschichte, Staat, Kultur Von Dr. A. Luther. (Bd. 563.)
Schrift- und Buchwesen in alter und neuer Zeit. Von Prof. Dr. O. Weise. 4. Aufl. Mit 57 Abb. (Bd. 4.)
— s. a. Buch. Wie ein B. entsteht. Abt. VI.
Schweiz. Die. Land, Volk, Staat u. Wirtschaft. Von Reg.- u. Ständerat Prof. Dr. O. Wettstein. Mit 1 Karte. (Bd. 482.)
Seekrieg s. Kriegsschiff.
Sitten und Gebräuche in alter und neuer Zeit. Von Prof. Dr. E. Samter. (682.)
Soziale Bewegungen und Theorien bis zur modernen Arbeiterbewegung Von G. Maier. 6. Aufl. (Bd. 2.)
— s. a. Marx, Rom., Sozialism. Mod.
Staat. St. u. Kirche in ihr. gegenst. Verhältnis seit d. Reformation V. Pfarrer Dr. phil. A. Pfannkuche. (Bd. 485.)
— Dtsche. Städte u. Bürger i. Mittelalter. V. Prof. Dr. B. Heil. 3. Aufl. Mit zahlr. Abb. u. 1 Doppeltafel. (Bd. 43.)
— Verfassung u. Verwaltung d. deutschen Städte. V. Dr. M. Schmid. (Bd. 466.)
— s. a. Griech. Städte, Domest. ...m
Sternglaube und Sterndeutung. Die Geschichte u. d. Wesen d. Astrologie. Unt. Mitwirk. v. Geh. Rat Prof. Dr. C. Bezold dargest. v. Geh.-Hofr. Prof. Dr. Fr. Boll. 2. Aufl. M. 1 Sternk. u. 20 Abb. (638.)
Student. Der Leipziger, von 1409 bis 1909. Von Dr. W. Bruchmüller. Mit 25 Abb. (Bd. 273.)
Studententum. Geschichte d. deutschen St. Von Dr. W. Bruchmüller. (Bd. 477.)
Türkei. Die. V. Reg.-Rat P. N. Krause. Mit 2 Karten i. Text und auf 1 Tafel. 2. Aufl. (Bd. 469.)
Urzeit i. german. Kultur in der U.
Verfassung. Grundzüge der V. des Deutschen Reiches. Von Geheimrat Prof. Dr. E. Löning. 5. Aufl. (Bd. 34.)
Verfassungsrecht. Deutsches, in geschichtlicher Entwicklung. Von Prof. Dr. Ed. Hubrich. 2. Aufl. (Bd. 80.)
Vermessungs- u. Kartenkunde s. Kartenk.
Volk. Vom deutschen V. zum dt. Staat. Eine Gesch. d. Nationalbewußtseins. V. Prof. Dr. P. Joachimsen (Bd. 511.)
Völkerkunde. Allgemeine. I: Feuer, Nahrungserwerb, Wohnung, Schmuck und Kleidung. Von Dr. A. Heilborn. M. 54 Abb. (Bd. 487.) II. Waffen u. Werkzeuge, Industrie, Handel u. Geld, Verkehrsmittel. Von Dr. A. Heilborn. M. 51 Abb. (Bd. 488.) III: Die geistige Kultur der Naturvölker. Von Prof. Dr. K. Th. Preuß. M. 9 Abb. (Bd. 452.)
Volksbräuche, deutsche, siehe Feste.
Volkskunde, Deutsche, im Grundriß. Von Prof. Dr. C. Reuschel. I. Allgemeines, Sprache, Volksdichtung. (Bd. 644.)
— s. auch Bauernhaus, Feste, Sitten, Sternglaub., Volkstracht., Volksstämme.
Volksstämme. Die deutschen, und Landschaften. Von Prof. Dr. O. Weise. 5., völlig umgearb. Aufl. Mit 30 Abb. i. Text u. auf 20 Taf. u. einer Dialektkarte Deutschlands. (Bd. 16.)
Volkstrachten. Deutsche. Von Pfarrer K. Spieß. Mit 11 Abb. (Bd. 542.)
Vom Bund zum Reich siehe Geschichte.
Von Jena bis zum Wiener Kongreß. Von Prof. Dr. G. Roloff. (Bd. 465.)
Von Luther zu Bismarck. 12 Charakterbilder a. deutscher Gesch. V. Prof. Dr. O. Weber. 2 Bde. 2 Aufl. (Bd. 123, 124.)
Vorgeschichte Europas. Von Prof. Dr. H. Schmidt. (Bd. 571/572.)
Weltgeschichte s. Christentum.
Welthandel s. Handel.
Weltpolitik s. Politik.
Wirtschaftsgeschichte. Antike. Von Privatdozent Dr. O. Neurath. 2., umgearbeitete Auflage (Bd. 258.)
— s. a. Antikes Leben n. d. ägypt. Papyri.
Wirtschaftsleben. Deutsches. Auf geogr. Grundl. gesch. V. Prof. Dr. Chr. Gruber. 4. Aufl. V. Dr. H. Reinlein. (42.)
— s. auch Abt. VI.

V. Mathematik, Naturwissenschaften und Medizin.

Aberglaube. Der, in der Medizin u. s. Gefahr f. Gesundh. u. Leben. V. Prof. Dr. D. v. Hansemann. 2. Aufl. (Bd. 83.)
Abstammungs- und Vererbungslehre. Experimentelle. Von Prof. Dr. E. Lehmann. Mit 26 Abb. (Bd. 379.)
Abstammungslehre u. Darwinismus. V. Pr. Dr. R. Hesse. 5. A. M. 40 Abb. (Bd. 39.)
Abwehrkräfte des Körpers. Die. [führung in die Immunitätslehre. Prof. Dr. med. H. Kämmerer. 52 Abbildungen. (Bd. ...]
Akustik, Einführung in die A. Von Dr. F. A. Schulze. (Bd. ...]
Algebra siehe Arithmetik. [Bd. ...]
Ameisen, Die. Von Dr. med. ...

Anatomie d. Menschen, Die. V. Prof. Dr. K. v. Bardeleben. 6 Bde. Jeder Bd. mit zahlr. Abb. (Bd. 418/423.) I. Zelle und Gewebe. Entwicklungsgeschichte. Der ganze Körper. 3. Aufl. II. Das Skelett. 2. Aufl. III. Das Muskel- u. Gefäßsystem. 2. Aufl. IV. Die Eingeweide (Darm-, Atmungs-, Harn- und Geschlechtsorgane, Haut). 3. Aufl. V. Nervensystem und Sinnesorgane. VI. Mechanik (Statik u. Kinetik) d. menschl. Körpers (der Körper in Ruhe u. Bewegung). 2. Aufl.
— siehe auch Wirbeltiere.
Aquarium, Das. Von E. W. Schmidt. Mit 15 Fig. (Bd. 335.)
Arbeitsleistungen des Menschen, Die. Einführ. in d. Arbeitsphysiologie. V. Prof. Dr. H. Boruttau. M. 14 Fig. (Bd. 539.)
— **Berufswahl, Begabung u. Arbeitsleistung** in i. gegenf. Beziehungen. Von W. J. Ruttmann. Mit 7 Abb. (Bd. 522.)
Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Prof. P. Crantz. 2 Bände. I.: Die Rechnungsarten. Gleichungen 1. Grades mit einer u. mehreren Unbekannten. Gleichungen 2. Grades. 6. Aufl. M. 9 Fig. i. Text. II.: Gleichungen, Arithmet. u. geometr. Reih. Zinseszins- u. Rentenrechn. Kompl. Zahlen. Binom. Lehrsatz. 4. Aufl. M. 21 Fig. (Bd. 120, 205.)
Arzneimittel und Genußmittel. Von Prof. Dr. O. Schmiedeberg. (Bd. 363.)
Arzt, Der. Seine Stellung und Aufgaben im Kulturleben der Gegenw. Ein Leitfaden der sozialen Medizin. Von Dr. med. M. Fürst. 2. Aufl. (Bd. 265.)
Astronomie. Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. 2. Aufl. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. I. Probleme der mod. Astronomie. Mit 11 Fig. (Bd. 355.) II. Mod. Astronomie. (Bd. 445.)
— **Die A. in ihrer Bedeutung für das praktische Leben.** Von Prof. Dr. A. Marcuse. Mit 26 Abb. (Bd. 378.)
— siehe auch Mond, Planeten, Sonne, Weltall, Weltbild; Sternglaube. Abt. I.
Atome s. Materie.
Auge, Das, und die Brille. Von Prof. Dr. M. v. Rohr. 2. Aufl. Mit 84 Abb. u. 1 Lichtdrucktafel. (Bd. 372.)
Ausgleichungsrechn. s. Kartenkde. Abt. IV.
Bakterien, Die, im Haushalt und der Natur des Menschen. Von Prof. Dr. E. Gutzeit. 2. Aufl. Mit 13 Abb. (242.)
— **Die krankheiterregenden Bakterien.** [illegible]tsachen d. Entsteh., Heilung u. [illegible]hütung d. bakteriellen Infektionskrankheiten d. Menschen. V. Prof. Dr. M. [illegible]klein. 2. Aufl. M. 33 Abb. (Bd. 307.)
Abwehrkräfte, Desinfektion, Pilze, [illegible]inge.
[illegible]. Tätigkeit d. menschl. Körpers. Einf[illegible]e Physiologie d. Menschen. V. Prof. [illegible]. Sachs. 4. A. M. 34 Abb. (Bd. 32.)
[illegible] s. Arbeitsleistung.
Befruchtung und Vererbung. Von Dr. E. Teichmann. 2. Aufl. M. 9 Abb. u. 4 Doppeltafeln. (Bd. 70.)
Bewegungslehre s. Mechan., Aufg. a. d. M. I.
Bienen, Die. Von Prof. Dr. E. Zander. (Bd. 705.)
Biochemie, Einführung in die B. in elementarer Darstellung. Von Prof. Dr. M. Löb. Mit 12 Fig. 2. Aufl. v. Prof. Dr. H. Friedenthal. (Bd. 352.)
Biologie, Allgemeine, Einführ. i. d. Hauptprobleme d. organ. Natur. V. Prof. Dr. H. Miehe. 2. Aufl. 52 Fig. (Bd. 130.)
—, **Experimentelle.** Regeneration, Transplantat. und verwandte Gebiete. Von Dr. C. Thesing. Mit 1 Tafel und 69 Textabbildungen. (Bd. 337.)
— siehe a. Abstammungslehre, Bakterien, Befruchtung, Fortpflanzung, Lebewesen, Organismen, Schädlinge, Tiere, Urtiere.
Blumen. Unsere Bl. u. Pflanzen im Garten. Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 69 Abb. (Bd 360.)
— **Unf Bl. u. Pflanzen i. Zimmer.** V. Prof. Dr. U. Dammer. M. 65 Abb. (Bd. 359.)
Blut, Herz, Blutgefäße und Blut und ihre Erkrankungen. Von Prof. Dr. H. Rosin. Mit 18 Abb. (Bd. 312.)
Botanik, B. d. praktischen Lebens. V. Prof. Dr. P. Gisevius. M. 24 Abb. (Bd. 173.)
— siehe Blumen, Lebewesen, Pflanzen, Pilze, Schädlinge, Wald; Kolonialbotanik, Tabak Abt. VI.
Brille s. Auge u. d. Brille.
Chemie, Einführung in die allg. Ch. V. Studienrat Dr. B. Bavink. 2. Aufl. Mit zahlr. Fig. (Bd. 582.)
— **Ein führg. i. d. organ. Chemie:** Natürl. u. künstl. Pflanz.- u. Tierstoff. V. Studienrat Dr. B. Bavink. 2. A. 9 Abb. (187.)
— **Einführung i. d. anorganische Chemie.** V. Studienrat Dr. B. Bavink. (598.)
— **Einführung i. d. analyt. Chemie.** V. Dr. F. Rüsberg. 2 Bde. (Bd. 524, 525.)
— **Die künstliche Herstellung von Naturstoffen.** V. Prof. Dr. E. Rüst. (Bd. 674.)
— **Ch. in Küche und Haus.** Von Dr. J. Klein. 4. Aufl. (Bd. 76.)
— siehe a. Biochemie, Elektrochemie, Luft, Photoch.; Agrikulturch., Sprengstoffe, Technik, Chem. Abt. VI.
Chemikalienkunde. Von Chemiker Emil Drechsler. (Bd. 728.)
Chirurgie, Die, unserer Zeit. Von Prof. Dr. J. Feßler. Mit 52 Abb. (Bd. 339.)
Darwinismus, Abstammungslehre und D. Von Prof Dr. R. Hesse. 5. Aufl. Mit 40 Textabb. (Bd 39.)
Desinfektion, Sterilisation und Konservierung. Von Reg.- u. Med.-Rat Dr. O. Solbrig. M. 20 Abb. i. T. (Bd. 401.)

Differentialrechnung unter Berücksichtig. d. prakt. Anwendung in der Technik mit zahlr. Beispielen u. Aufgaben versehen. Von Studienrat Dr. M. Lindow. 2. A. M. 45 Fig. i. Text u. 161 Aufg. (387.)
— siehe a. Integralrechnung.
Drogenkde. V. Chem. E. Drechsler. (727.)
Dynamik i. Mechanik, Aufg. a. d. techn. M. 2 Bd., ebenso Thermodynamik.
Eiszeit, Die, u. der vorgesch. Mensch. Von Geh. Bergr. Prof. Dr. G. Steinmann. 2. Aufl. Mit 24 Abb. (Bd. 302.)
Elektrochemie u. ihre Anwendungen. Von Prof. Dr. K. Arndt. 2. Aufl. Mit 37 Abb. i. T. (Bd. 234.)
Elektrotechnik, Grundlagen der E. Von Oberingenieur A. Roth. 2. Aufl. Mit 74 Abb. (Bd. 391.)
Energie. D. Lehre v. d. E. V. Oberlehr. A. Stein. 2. A. M. 13 Fig. (Bd. 257.)
Entwicklungsgeschichte d. Menschen. V. Dr. A. Heilborn. M. 60 Abb. (Bd. 368.)
Erde s. Weltentstehung u. -untergang.
Ernährung und Nahrungsmittel. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. N. Kuntz. 3. Aufl. Mit 6 Abb. i. T. u. 2 Taf. (19.)
Experimentalchemie s. Luft usw.
Experimentalphysik s. Physik.
Farben s. Licht u. F.: s. a. Farben Abt. VI.
Festigkeitslehre s. Statik.
Fixsterne, Die. V. Dr. Aug. Kühl. (677.)
Fortpflanzung. F. und Geschlechtsunterschiede d. Menschen. Eine Einführung in die Sexualbiologie. V. Prof. Dr. H. Boruttau. 2. Aufl. M. 39 Abb. (Bd. 540.)
Garten. Der Kleine. Von Redakteur Joh. Schneider. 2. Aufl. M. 80 Abb. (498.)
— **Der Hausgarten.** Von Gartenarchitekt W. Schubert. Mit Abb. (Bd. 502.)
— siehe auch Blumen, Pflanzen; Gartenkunst, Gartenstadtbewegung Abt. VI.
Gebiß. Das menschl., s. Erkrank. u. Pflege. V. Zahnarzt Fr. Jäger. M. 24 Abb. (229.)
Geisteskrankheiten. V. Geh. Med.-Rat Oberstabsarzt Dr. G. Ilberg. 2. A. (151.)
Genußmittel siehe Arzneimittel u. Genußmittel; Tabak Abt. VI.
Geographie s. Abt. IV.
— **Math. G.** s. Astronomie u. Erdkunde Abt. IV.
Geologie. Allgemeine. V. Geh. Bergr. Prof. Dr. Fr. Frech. 6 Bde. (Bd. 207/211 u. Bd. 61.) I.: Vulkane einst und jetzt. 3. Aufl. M. Titelbild u. 78 Abb. II.: Gebirgsbau und Erdbeben. 3., wes. erw. Aufl. M. Titelbild u. 57 Abb. III.: Die Arbeit des fließenden Wassers. 3. Aufl. M. 56 Abb. IV.: Die Bodenbildung, Mittelgebirgsformen u. Arbeit des Ozeans. 3., wes. erw. Aufl. Mit 1 Titelbild u. 68 Abb. V. Steinkohle, Wüsten u. Klima der Vorzeit. 3. Aufl. Mit 39 Abb. VI. Gletscher einst u. jetzt. 3. Aufl. Mit 46 Abb. im Text.
— s. a. Kohlen, Salzlagerstätt. Abt. VI.
Geometrie. Analyt. G. d. Ebene z. Selbstunterricht. Von Prof. W. Crantz. 2. Aufl. Mit 55 Fig. (Bd. 504.)
— **Geometr. Zeichnen.** Von Zeichenlehrer A. Schubeisky. (Bd. 568.)
— s. a. Mathematik.
Geomorphologie s. Allgem. Erdkunde.
Geschlechtskrankheiten, Die, ihr Wesen, ihre Verbreitg., Bekämpfg. u. Verhütg. Für Gebildete aller Stände bearb. v. Generalarzt Prof. Dr. W. Schumburg. 4. A. Mit 4 Abb. u. 1 mehrfarb. Taf. (251.)
Geschlechtsunterschiede s. Fortpflanzung.
Gesundheitslehre. Von Obermed.-Rat Prof. Dr. M. v. Gruber. 4. Aufl. Mit 26 Abbildungen. (Bd. 1.)
— **G. für Frauen.** Von Dir. Prof. Dr. K. Baisch. 2. Aufl. M. 11 Abb. (538.)
— s. a. Abwehrkräfte, Bakterien, Leibesüb.
Graph. Darstellung. Die. V. Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. 2. Aufl. Mit 139 Figuren. (Bd. 437.)
Haushalt siehe Bakterien, Chemie, Desinfektion, Naturwissenschaften, Physik.
Haustiere. Die Stammesgeschichte unserer H. Von Prof. Dr. C. Keller. 2. Aufl. Mit 29 Figuren. (Bd. 252.)
— s. a. Kleintierzucht, Tierzüchtg. Abt. VI.
Herz, Blutgefäße und Blut und ihre Erkrankungen. Von Prof. Dr. H. Rolin. Mit 18 Abb. (Bd. 312.)
Hygiene s. Schulhygiene, Stimme.
Hypnotismus und Suggestion. Von Dr. E. Trömner. 3. Aufl. (Bd. 199.)
Immunitätslehre s. Abwehrkräfte d. Körp.
Infinitesimalrechnung. Einführung in die I. Von Prof. Dr. G. Kowalewski. 3. Aufl. Mit 19 Fig. (Bd. 197.)
Integralrechnung mit Aufgabensammlung. V. Studienrat Dr. M. Lindow. 2. Aufl. Mit Fig. (Bd. 675.)
Kalender, Der. Von Prof. Dr. W. F. Wislicenus. 2. Aufl. (Bd. 69.)
Kälte, Die. Wesen, Erzeug. u. Verwert. Von Dr. H. Alt. 45 Abb. (Bd. 311.)
Kinematographie s. Abt. VI.
Konservierung siehe Desinfektion.
Korallen u. and. gesteinbild. Tiere. V. Prof. Dr. W. May. Mit 45 Abb. (Bd. 231.)
Kosmetik. Ein kurzer Abriß der ärztlichen Verschönerungskunde. Von Dr. J. Saudek. Mit 10 Abb. im Text. (Bd. 489.)
Lebewesen. Die Beziehungen der Tiere und Pflanzen zueinander. Von Prof. Dr. K. Kraepelin. 2. Aufl. I. Der Tiere zueinander. M. 64 Abb. II. Der Pflanzen zueinander u. zu d. Tieren. 68 Abb. (Bd. 426/4
— s. a. Biologie, Organismen, Schädlin
Leib und Seele. Von Dr. phil. et med Sommer. (Bd. 7
Leibesübungen, Die, und ihre Bedeut für die Gesundheit. Von Prof. Dr. Bander. 4. Aufl. M. 20 Abb.
— s. auch Turnen.

Licht. Das, u. d. Farben. Einführung in die Optik. Von Prof. Dr. B. Graetz. 4. Aufl. Mit 100 Abb. (Bd. 17.)
Luft. Wasser, Licht und Wärme. Neun Vorträge aus d. Gebiete d. Experimentalchemie. V. Geh. Reg.-Rat Dr. R. Blochmann. 4 Aufl. M. 115 Abb. (Bd. 5.)
Luftschiffahrt. D., u. ihre Verwertung. V. Prof. Dr. K. Kaiser. 2. A. M. 13 Abb. (313.)
Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abb. (Bd. 585.)
Materie. Das Wesen d. M. V. Prof. Dr. G. Mie. I. Moleküle und Atome. 4. A. Mit 25 Abb. II. Wetteräther und Materie. 4. Aufl. Mit Fig. (Bd. 58/59.)
Mathematik. Einführung in die Mathematik. Von Oberlehrer W. Mendelssohn. Mit 42 Fig. (Bd. 503.)
— **Math. Formelsammlung.** Ein Wiederholungsbuch der Elementarmathematik. Von Prof. Dr. S. Jakobi. (Bd. 567.)
— **Naturwissensch. u. M. i. klass. Altertum.** Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. Mit 2 Fig. (Bd. 370.)
— **Praktische M.** Von Prof. Dr. R. Neuendorff. I. Graphische Darstellungen. Verkürztes Rechnen. Das Rechnen mit Tabellen. Mechanische Rechenhilfsmittel. Kaufmännisches Rechnen i. tägl. Leben. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2., verb. A. M. 29 Fig. i. T. u. 1 Taf. II. Geom. Zeichnen. Projektionsl. Flächenmessung. Körpermessung. M. 133 Fig. (341. 526.)
— **Mathemat. Spiele.** V. Dr. W. Ahrens. 3. Aufl. M. 1 Titelb. u. 77 Fig. (Bd. 170.)
— s. a. Arithmetik, Differentialrechnung, Geometrie, Infinitesimalrechnung, Integralrechnung, Perspektive, Planimetrie, Projektionslehre, Trigonometrie, Vektorrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Mechanik. Von Prof. Dr. Hamel. 3 Bde. I. Grundbegriffe der M. II. M. d. festen Körper. III. M. d. flüss. u. luftförm. Körper (Bd. 684/686.)
— **Aufgaben aus d. techn. Mechanik** für den Schul- u. Selbstunterricht. V. Prof. R. Schmitt. I. Bewegungsl. Statik. 156 Aufg. u. Lös. II. Dynamik. 140 Aufg. u. Lös. m. zahlr. Fig. i. T. (658/559.)
— s. a. auch Statik.
Meer. Das M., s. Erforsch. u. s. Leben. Von Pri. Dr. O. Janson. 3. A. M. 40 Fig. (Bd. 80.)
Mensch u. Erde. Skizzen v. d. Wechselbezieh. zwischen beiden. Von Geh. Rat Prof. Dr. A. Kirchhoff. 4. Aufl. (Bd. 31.)
— **die Rassen der Menschen.** Von Prof. E. Fischer. (Bd. 624.)
— Eiszeit. Entwicklungsgesch. Urzeit.
— **Natur u. Mensch** siehe Natur
— **Nerv. Körper.** Bau u. Tätigkeit d. menschl. Körpers. Einführ. i. d. Physiol. d. M. V. Prof. J. Sachs. 4. Aufl. M. 34 Abb. (32.)
— s. a. auch Anatomie, Arbeitsleistungen, Auge, Blut, Fortpflanzg., Gebiß, Herz, Nervensystem, Physiol., Sinne, Verbild.
Mikroskop. Das. V. Prof. Dr. W. Scheffer. 2. Aufl. Mit 99 Abb. (Bd. 35.)
Molekülе s. Materie.
Mond. Der. Von Prof. Dr. J. Franz. 2. Aufl. Mit 34 Abb. (Bd. 90.)
Nahrungsmittel s. Ernährung u. N.
Natur u. Mensch. V. Direkt. Prof. Dr. M. G. Schmidt. Mit 19 Abb. (Bd. 458.)
Naturlehre. Die Grundbegriffe der modernen N. Einführung in die Physik. Von Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. 4. Aufl. Mit 71 Fig. (Bd. 40.)
Naturphilosophie. Die mod. V. Privatdoz. Dr. J. M. Verweyen. 2. A. (Bd. 491.)
Naturwissenschaft. Religion und N. im Kampf u. Frieden. Ein geschichtl. Rückblick. V. Pfarrer Dr. A. Pfannkuche. 2. Aufl. (Bd. 141.)
— N. und Technik. Am sausenden Webstuhl d. Zeit. Übersicht üb. d. Wirkungen d. Naturw. u. Technik a. d. ges. Kulturleben. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. W. Launhardt. 3. Afl. M. 3 Abb. (23.)
— N. u. Math. i. klass. Altert. V. Prof. Dr. J. L. Heiberg. 2 Fig. (Bd. 370.)
Nerven. Vom Nervensystem, sein Bau u. sein. Bedeutung für Leib u. Seele im gesund u. krank. Zustande. V. Prof. Dr. R. Sander. 3. Aufl. M. 27 Abb. (Bd. 43.)
— siehe auch Anatomie.
Optik. Die opt. Instrumente. Lupe, Mikroskop, Fernrohr, photogr. Objektiv u. ihnen verwandte Instr. V. Prof. Dr. M. v. Rohr. 3. Aufl. M. 89 Abb. (88.)
— s. a. Auge, Brille, Kinemat., Licht u. Farbe, Mikrosk., Spektroskopie, Strahlen.
Organismen. D. Welt d. O. In Entwickl. und Zusammenhang dargestellt. Von Oberstudienrat Prof. Dr. K. Lambert. Mit 52 Abb. (Bd. 236.)
— siehe auch Lebewesen.
Paläozoologie siehe Tiere der Vorwelt.
Perspektive. Die. Grundzüge d. P. nebst Anwendg. V. Prof. Dr. K. Doehlemann. Mit 91 Fig. u. 11 Abb. (Bd. 510.)
Pflanzen. Die fleischfress. Pfl. V. Prof. Dr. A. Wagner. Mit 82 Abb. (Bd. 344.)
— Unsere Blumen u. Pfl. i. Garten. V. Prof. Dr. L. Dammer. M. 69 Abb. (Bd. 360.)
— Unsere Blumen u. Pfl. i. Zimmer. V. Prof. Dr. L. Dammer. M. 66 Abb. (Bd. 359.)
— s. auch Botanik, Garten, Lebewesen, Pilze, Schädlinge.
Pflanzenphysiologie. V. Prof. Dr. H. Molisch. Mit 63 Fig. (Bd. 569.)
Photochemie. Von Prof. Dr. G. Kümmell. 2. Aufl. Mit 23 Abb. i. Text u. a. 1 Taf. (Bd. 227.)
Photographie s. Abt. VI.
Physik. Werdegang d. mod. Ph. V. Oberl. Dr. H. Keller. 2. Afl. M. Fig. (343.)
— **Experimentalphysik.** Gleichgewicht u. Bewegung. Von Geh. Reg.-Rat. Prof. Dr. R. Börnstein. M. 90 Abb. (371.)

Physik. Ph. i. Küche u. Haus. B. Studienr. H. Speitkamp M. 51 Abb. (Bd. 478.)
— **Große Physiker.** Von Prof. Dr. F. A. Schulze. 2. Aufl. Mit 8 Bildn. (324.)
— s. auch Energie, Naturlehre, Optik, Relativitätstheorie, Wärme; ebenso Elektrotechnik Abt. VI.
Physiologie. Ph. d. Menschen. B. Privatdoz. Dr. A. Lipschütz. 4 Bde. I: Allgem. Physiologie. II: Physiologie d. Stoffwechsels. III: Ph. d. Atmung, d. Kreislaufs u. d. Ausscheidung. IV: Ph. der Bewegungen und der Empfindungen. (Bd 527—530.)
— siehe auch Arbeitsleistungen. Menschl. Körper. Pflanzenphysiologie.
Pilze, Die. Von Dr. A. Eichinger. Mit
— s. a. Bakterien. [64 Abb. (Bd. 354.)
Planeten, Die. Von Prof. Dr. H. Peter. 2. Aufl. Von Dr. H. Naumann. Mit Figuren. (Bd. 240.)
Planimetrie z. Selbstunterricht. B. Prof. P. Crantz. 2. Aufl. M. 94 Fig. (340.)
Praktische Mathematik s. Mathematik.
Projektionslehre. In kurzer leichtfaßlicher Darstellung f. Selbstunterr. u. Schulgebr. Von Zeichenl. A. Schubeisky. Mit 208 Fig. im Text. (Bd. 564.)
Radium, Das, u. d. Radioaktivität. B. Dr. M. Centnerszwer. 2. Afl. M. 33 Abb.
Rassen s. Mensch. [(Bd. 405.)
Rechenmaschinen, Die, und das Maschinenrechnen. Von Reg.-Rat Dipl.-Ing. K. Lenz. Mit 43 Abb. (Bd. 490.)
Relativitätstheorie. Einführung in die. M. 16 Fig. B. Dr. W. Blasch (Bd. 618.)
Röntgenstrahlen, D., u. ihre Anwendg. B. Dr. med. G. Bucky. M. 85 Abb. i. T. u. auf 4 Tafeln. (Bd. 556.)
Säuglingspflege. Von Dr. E. Kobrak. Mit 20 Abb. (Bd. 154.)
Schachspiel, Das, und seine strategischen Prinzipien. B. Dr. M. Lange. 3. Aufl. Mit 2 Bildn., 1 Schachbrettafel u. 43 Diagrammen. (Bd. 281.)
— **Die Hauptvertreter der Schachspielkunst u. d. Eigenart ihrer Spielführung.** Von Dr. M. Lange. (Bd. 531.)
Schädlinge, Die, im Tier- u. Pflanzenreich u. i. Bekämpf. B. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. K. Eckstein. 3. A. M. 36 Fig. (18.)
Schulhygiene. Von Prof. Dr. L. Burgerstein. 3. Aufl. Mit 43 Fig. (Bd. 96.)
Sexualbiologie s. Fortpflanzung. Pflanzen.
Sexualethik. B. Prof. Dr. H. E. Timerding. (Bd. 592.)
Sinne d. Mensch., D. Sinnesorgane u. Sinnesempfindungen B. Hofrat Prof. Dr. J. Kreibig. 3. Aufl. M. 30 Abb. (27.)
Sonne, Die. Von Dr. A. Krause. Mit 64 Abb. (Bd. 357.)
Spektroskopie. Von Dr. L. Grebe. 2. Aufl. Mit Abbildg. (Bd. 284.)
Spiel siehe Mathem. Spiele, Schachspiel.
Sprache. Die menschliche Sprache. (Ihre Entwicklung beim Kinde, ihre Gebrechen und deren Heilung.) Von Lehrer K. Nickel. (Bd. 586.)
— siehe auch Rhetorik. Sprache Abt III.
Statik. Mit Einschluß der Festigkeitslehre. B. Baugewerkschuldirektor Reg.-Baum. A. Schau. Mit 149 Fig. i. T. (Bd. 497.)
— siehe auch Mechanik.
Sterilisation siehe Desinfektion.
Stickstoff s. Luftstickstoff.
Stimme. Die menschliche St. und ihre Hygiene. Von Geh. Med.-Rat Prof. Dr. H. H. Gerber. 3., verb. Aufl. Mit 21 Abb. (Bd. 136.)
Strahlen, Sichtbare u. unsichtb. B. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Börnstein u. Prof. Dr. W. Marckwald. 3. Afl. v. Prof. Dr. E. Regener. M. zahlr. Abb. (Bd. 64.)
Suggestion. Hypnotismus und Suggestion. B. Dr. E. Trömner. 3. Aufl. (Bd. 199.)
Süßwasser-Plankton, Das. B. Prof. Dr. O. Zacharias. 2. A. 57 Abb. (Bd. 156.)
Tabak, Der. Von Jak. Wolf. 2. Aufl. Mit 17 Abb. i. T. (Bd. 416.)
Thermodynamik s. Abt. VI.
Tiere. T. der Vorwelt. Von Prof. Dr. O. Abel. Mit 31 Abb. (Bd. 399.)
— **Die Fortpflanzung der T.** B. Prof. Dr. R. Goldschmidt. Mit 77 Abb. (Bd. 253.)
— **Tierkunde. Eine Einführung in die Zoologie.** Von Privatdozent Dr. K. Heunings. Mit 34 Abb. (Bd. 142.)
— **Lebensbedingungen und Verbreitung der Tiere.** Von Prof. Dr. O. Maas. Mit 11 Karten und Abb. (Bd. 139.)
— **Zwiegestalt der Geschlechter in der Tierwelt (Dimorphismus).** Von Dr. Fr. Knauer. Mit 37 Fig. (Bd. 148.)
— s. auch Aquarium, Bakterien, Bienen, Haustiere, Korallen, Lebewesen, Schädlinge, Urtiere, Vogelleben, Vogelzug, Wirbeltiere.
Tierzucht siehe Abt. VI: Kleintierzucht, Tierzüchtung.
Trigonometrie, Ebene, z. Selbstunterr. B. Studienr. P. Crantz. 2. A. M. 50 Fig. (Bd. 431.)
— **Sphärische Tr.** B. Studienr. P. Crantz. (Bd. 605.)
Tuberkulose. Die, Wesen, Verbreitung, Ursache, Verhütung und Heilung. Von Generalarzt Prof. Dr. W. Schumburg. 3 Aufl. M. 1 Taf. u. 8 Fig. (Bd.
Turnen. Von Oberl. F. Eckardt. 1 Bildnis Jahns. (Bd.
— s. auch Leibesübungen, Anatom. Menschen Bd. VI.
Urtiere, Die. Einführung i. d. Wissen. vom Leben. Von Prof. Dr. R. Goldschmidt. 2. A. M. 44 Abb. (Bd.

Urzeit. Der Mensch d. U. Vier Vorlesung. aus der Entwicklungsgeschichte des Menschengeschlechts. Von Dr. A. Heilborn. 3. Aufl. Mit 47 Abb. (Bd. 62.)
Vektorrechnung. Einführung in die V. V. Prof. Dr. G. Jung. (Bd. 668.)
Verbildungen. Körperliche, im Kindesalter u. ihre Verhütung. Von Dr. M. David. Mit 26 Abb. (Bd. 321.)
Vererbung. Ers. Abstammgs.- u. V.-Lehre. Von Prof. Dr. E. Lehmann. Mit 20 Abbildungen. (Bd. 379.)
— **Geistige Veranlagung u. V.** V. Dr. phil et med G. Sommer. 2. Aufl. (512.)
Vogelleben, Deutsches. Zugleich als Exkursionsbuch für Vogelfreunde. V. Prof. Dr. A. Voigt. 2. Aufl. (Bd. 221.)
Vogelzug und Vogelschutz. Von Dr. W. R. Eckardt. Mit 6 Abb. (Bd. 218.)
Wahrscheinlichkeitsrechnung. Einführ. in die. Von Prof. Dr. R. Suppantschitsch. (Bd. 584.)
Wald. Der deutsche. V. Prof. Dr. H. Hausrath. 2 Aufl. M. Bilderanh. u. 2. Karten.
— siehe auch Holz Abt. VI. (Bd. 153.)
Wärme. Die Lehre v. d. W. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Börnstein. Mit Abb. 2. Aufl. v. Prof. Dr. A. Wigand. (172.)
— s. a. Luft. Wärmekraftmasch., Wärmelehre, techn Thermodynamik Abt. VI.
Wasser. Das. Von Geh. Reg.-Rat Dr. O. Anselmino. Mit 44 Abb. (Bd. 291.)
Weidwerk, Deutsches. Forstmstr. G. Frhr. v. Nordenflycht. M. Titelb. (Bd. 436.)
Weltall. Der Bau des W. Von Prof. Dr. J. Scheiner 4. A. M. 26 Fig. (Bd. 24.)
Weltäther s. Materie.
Weltbild. Das astronomische W. im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. 2 Aufl. Mit 19 Abb. (Bd. 110.)
— siehe auch Astronomie.
Weltentstehung. Entstehung d. W. u. d. Erde nach Sage u. Wissensch. V. Prof. Dr M. V. Weinstein. 3. Aufl. (Bd. 223.)
Weltuntergang. Untergang der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. V. Prof. Dr M. V. Weinstein. (Bd. 470.)
Wetter. Unser W. Einführ. i. d. Klimatol. Deutschl. V. Dr. R. Henning. 2. Aufl. Mit 14 Abb (Bd. 349.)
— **Einführung in die Wetterkunde.** Von Prof. Dr. V. Weber. 3. Aufl. Mit 28 Abb. u. 3 Taf. (Bd. 55.)
Wirbeltiere. Vergleichende Anatomie der Sinnesorgane der W. Von Prof. Dr. W. Lubosch. Mit 107 Abb. (Bd. 282.)
Zahnheilkunde siehe Gebiß.
Zellen- und Gewebelehre siehe Anatomie des Menschen. Biologie.
Zoologie s. Abstammungsl., Aquarium, Bienen, Biologie, Schädlinge, Tiere, Urtiere, Vogelleben, Vogelzug, Weidwerk, Wirbeltiere.

VI. Recht, Wirtschaft und Technik.

Agrikulturchemie. Von Dr. V. Krische. Mit 21 Abb. (Bd. 314.)
Angestellte siehe Kaufmännische A.
Antike Wirtschaftsgeschichte. V. Priv.-Doz. Dr. E. Neurath. 2., umgearb. A. (258.)
— siehe auch Antikes Leben Abt. IV.
Arbeiterschutz und Arbeiterversicherung. V. Geh Hofrat Prof Dr. C. v. Zwiedineck-Südenhorst. 2. Aufl. (78.)
Arbeitsleistungen des Menschen. Die. Einführ in d. Arbeitsphysiologie. V. Prof. Dr. H. Boruttau. M. 14 Fig. (Bd. 539.)
— **Berufswahl, Begabung u. A. in ihren gegenseitigen Beziehungen.** Von W. J. Ruttmann. Mit 7 Abb. (Bd. 522.)
Arzneimittel und Genußmittel. Von Prof. Dr. O. Schmiedeberg. (Bd. 365.)
Arzt. Der. Seine Stellung und Aufgaben im Kulturleben der Gegenw. Von Dr. med. M. Fürst. 2. Aufl. (Bd. 265.)
Automobil. Das. Eine Einf. in d. Bau d. Personen-Kraftwagens. V. Ob.-Ing. Slau 3., überarb. Aufl. M. 98 Abb. Titelbild. (Bd. 166.)
...unde s. Eisenbetonbau.
...kunst siehe Abt. III.
...chtungswesen, Das moderne. Von Dr. H. Lux. M. 54 Abb. (Bd. 433.)
...au. Von Bergassessor F. W. Web- (Bd. 467.)
Bewegungslehre s. Mechan., Aufg. a. d. M.
Bierbrauerei. Von Dr. A. Bau. Mit 47 Abb. (Bd. 333.)
Bilanz s. Buchhaltung u. B.
Blumen. Uns. Bl. u. Pfl. i. Garten. Von Prof. Dr. R. Dammer. M. 69 Abb. (360.)
— Uns. Bl. u. Pfl. i. Zimmer. V. Prof. Dr. U. Dammer. M. 65 Abb. (Bd. 359.)
— siehe auch Garten.
Brauerei s. Bierbrauerei.
Buch. Wie ein B. entsteht. V. Prof. A. W. Unger. 4. Aufl. M. 7 Taf. u. 26 Abb. im Text. (Bd. 175.)
— s. a. Schrift- u. Buchwesen Abt. IV.
Buchhaltung u. Bilanz, Kaufm., und ihre Beziehungen z. buchhalter. Organisation, Kontrolle u. Statistik. V. Dr. L. Gerstner. 2. Aufl. M. 4 schemat. Darst. (507.)
Chemie in Küche und Haus. Von Dr. J. Klein. 4. Aufl. (Bd. 76.)
— s. auch Agrikulturchemie, Elektrochemie, Farben, Sprengstoffe, Technik; ferner Chemie Abt. V.
Dampfkessel siehe Feuerungsanlagen.
Dampfmaschine. Die. Von Geh Bergrat Prof. R. Vater. 2 Bde. I: Wirkungsweise des Dampfes im Kessel und in der Maschine. 4. Aufl. M. 57 Abb. (Bd. 393.) II: Ihre Gestaltung und Verwendung. 2. Aufl. Mit 105 Abb. (Bd. 394.)

Desinfektion, Sterilisation und Konservierung. Von Reg.- und Med.-Rat Dr. O. Selbrig. Mit 20 Abb. (Bd. 401.)
Deutsch s. Handel, Handwerk, Landwirtschaft, Verfassung, Weidwerk, Wirtschaftsleben, Zivilprozeßrecht; Reich Abt. IV.
Drähte u. Kabel, ihre Anfertig. u. Anwend. i. d. Elektrotech. V. Tel.-Insp. H. Brick. 2. Aufl. M. 43 Abb. (Bd. 285.)
Dynamik s. Mechanik, Aufg. a. d. M. 2. Bd., ebenso Thermodynamik.
Eisenbahnwesen, Das. Von Eisenbahnbau- u. Betriebsinsp. a. D. Dr.-Ing. E. Biedermann. 3. A. M. zahlr. Abb. (144.)
Eisenbetonbau, Der. V. Dipl.-Ing. E. Haimovici. 2. Aufl. Mit 82 Abb. i. T. sowie 6 Rechnungsbeisp. (Bd. 275.)
Eisenhüttenwesen, Das. Von Geh. Bergr. Prof. Dr. H. Wedding. 5. Aufl. v. Bergass. F. W. Wedding. M. 22 Abb. (20.)
Elektrische Kraftübertragung, Die. V. Ing. P. Köhn. Mit 137 Abb. (Bd. 424.)
Elektrochemie, Von Prof. Dr. K. Arndt. Mit 37 Abb. (Bd. 254.)
Elektrotechnik. Grundlagen d. E. V. Obering. A. Rotth. 2. Aufl. M. 74 Abb. (391.)
— s. auch Drähte u. Kabel, Telegraphie.
Erbrecht. Testamentserrichtung und E. Von Prof. Dr. F. Leonhard. (Bd. 429.)
Ernährung u. Nahrungsmittel s. Abt. V.
Farben u. Farbstoffe. J. Erzeug. u. Verwend. V. Dr. A. Zart. 31 Abb. (Bd. 483.)
— siehe auch Licht Abt. V.
Fernsprechtechnik s. Telegraphie.
Feuerungsanlagen, Industr., u. Dampfkessel. V. Ing. J. E. Mayer. 38 Abb. (Bd. 348.)
— siehe auch Geldwesen.
Funkentelegraphie siehe Telegraphie.
Fürsorge s. Kinderf., Kriegsbeschädigtenf.
Garten. Der Kleingarten. V. Redakt. Joh. Schneider. 2. Aufl. M. 80 Abb. (498.)
— Der Hausgarten. Von Gartenarchitekt W. Schubert. Mit Abb. (Bd. 502.)
— siehe auch Blumen.
Gartenkunst. Gesch. d. G. V. Baurat Dr.-Ing. Chr. Ranck. M. 41 Abb. (Bd. 274.)
Gartenstadtbewegung, Die. Von Landeswohnungsinspektor Dr. H. Kampffmeyer. 2. Aufl. M. 43 Abb. (Bd. 259.)
Gefängniswesen s. Verbrechen.
Geldwesen, Zahlungsverkehr u. Vermögensverwalt. Von G. Mayer. 2. Aufl. (398.)
— s. a. Finanzwissensch.; Münze Abt. IV.
Genußmittel siehe Arzneimittel und Genußmittel, Tabak.
Gewerblicher Rechtsschutz i. Deutschland. V. Patentanw. V. Tolkdorf. (Bd. 138.)
— siehe auch Urheberrecht.
Graphische Darstell., Die. V. Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. 2. A. M. 139 Abb. (437.)
Handel. Geschichte d. Welth. Von Realgymnasialdirektor Prof. Dr. M. G. Schmidt. 3. Aufl. (Bd. 118.)
Handel. Geschichte d. deutsch. Handels seit d. Ausgang des Mittelalters. Von Dir. Prof. Dr. B. Langenbeck. 2. Aufl. Mit 16 Tafeln. (Bd. 237.)
Handfeuerwaffen, Die. Entwickl. u. Techn. V. Major R. Weiß. 69 Abb. (Bd. 364.)
Handwerk, D. deutsche, in s. kulturgeschichtl. Entwicklg. V. Geh. Schulr. Dr. F. Otto. 4. Aufl. M. 33 Abb. auf 12 Taf. (Bd. 14.)
Haushalt s. Chemie, Desinfekt., Physik; Nahrungsm. Abt. IV; Bäcker. Abt. V.
Häuserbau siehe Baukunde, Beleuchtungswesen, Heizung u. Lüftung, Wohnungsw.
Hebezeuge. Hilfsmittel zum Heben fester, flüssiger und gasf. Körper. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2. Aufl. M. 67 Abb. (Bd. 196.)
Heizung und Lüftung. Von Ingenieur F. E. Mayer. Mit 40 Abb. (Bd. 241.)
Holz. Das H., seine Bearbeitung u. seine Verwendg. V. Insp. J. Großmann. Mit 39 Originalabb. i. T. (Bd. 473.)
Hotelwesen, Das. Von V. Damm-Etienne. Mit 30 Abb. (Bd. 331.)
Hüttenwesen siehe Eisenhüttenwesen.
Immunitätslehre s. Abwehrkräfte Abt. V.
Ingenieurtechnik. Schöpfungen d. I. der Neuzeit. Von Geh. Regierungsrat M. Geitel. Mit 32 Abb. (Bd. 28.)
Instrumente siehe Optische I.
Kabel s. Drähte und K.
Kälte, Die, ihr Wesen, i. Erzeug. u. Verwertg. V. Dr. H. Alt. M. 45 Abb. (311.)
Kaufmann. Das Recht des K. Ein Leitfaden f. Kaufleute, Studier. u. Juristen. V. Justizrat Dr. M. Strauß. (Bd. 409.)
Kaufmännische Angestellte, D. Recht d. k. A. V. Justizr. Dr. M. Strauß. (361.)
Kinderfürsorge. Von Prof. Dr. Chr. J. Klumker. (Bd. 620.)
Kinematographie. Von Dr. H. Lehmann. 2. Aufl. V. Dr. W. Mertz. Mit Abb. (Bd. 358.)
Klein- u. Straßenbahnen, Die. V. Oberingen. a. D. Oberlehrer A. Liebmann. Mit 85 Abb (Bd. 322.)
Kleintierzucht, Die. Von Redakt. Joh. Schneider. M. 59 Fig. i. T. u. a. 6 Taf.
— siehe auch Tierzüchtung. (Bd. 604.)
Kohlen, Unsere. V. Bergass. V. Kukuk. Mit 60 Abb i. Text u. 3 Taf. (Bd. 396.)
Kolonialbotanik. Von Prof. Dr. F. Tobler. Mit 21 Abb. (Bd. 184.)
Kolonisation, Innere. Von A. Brenning. (Bd. 261.)
Konservierung siehe Desinfektion
Konsumgenossenschaft, Die. Von Pri F. Staudinger. (Bd.
— s. auch Mittelstandsbewegung, schaftliche Organisationen.
Kraftanlagen siehe Dampfmaschine. rungsanlagen und Dampfkessel. W kraftmaschine, Wasserkraftmaschine.

Kraftübertragung. Die elekt. V. Ing. P. Köhn. 2. Aufl. M. Abb. (Bd. 424.)
Krieg. Kulturgeschichte d. K. V. Prof. Dr. K. Beule, Geh. Hofrat Prof. Dr. E. Bethe, Prof. Dr. B. Schmeidler, Prof. Dr. A. Doren, Prof. D. J. Herre. (Bd. 561.)
Kriegsbeschädigtenfürsorge. In Verbindung mit Med.-Rat, Oberstabsarzt u. Chefarzt Dr. Rebentisch, Gewerbeschuldir. H. Back, Direktor des Städt. Arbeitsamts Dr. B. Schlotter herausg. v. Prof. Dr. G. Kraus, Leit. d. Städt. Fürsorgeamts für Kriegshinterblieb. in Frankfurt a. M. M. 2 Abbildgst. (523.)
Kriegsschiffe, Unsere. Ihre Entstehg. u. Verwendg. V. Geh. Marinebaur. a. D. E. Krieger. 2. Aufl. v. Marinebaur. Fr. Schröer. Mit 62 Abb. (339.)
Kriminalistik, Moderne. Von Amtsrichter Dr. A. Hellwig. M. 18 Abb. (Bd. 476.)
— s. a. Verbrechen, Verbrecher.
Küche siehe Chemie in Küche und Haus.
Landwirtschaft, Die deutsche. V. Dr. W. Claaßen. 2. Aufl. Mit 15 Abb. u. 1 Karte. (Bd. 215.)
— s. auch Agrikulturchemie, Kleintierzucht, Luftstickstoff, Tierzüchtung; Haustiere, Tierkunde Abt. V.
Landwirtschaftl. Maschinenkunde. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. G. Fischer. 2. Aufl. Mit 64 Abbildungen. (Bd. 316.)
Luftfahrt, Die, ihre wissenschaftlichen Grundlagen und ihre technische Entwicklung. Von Dr. R. Nimführ. 3. Aufl. v. Dr. Fr. Huth. M. 60 Abb. (Bd. 300.)
Luftstickstoff. Der, u. s. Verw. V. Prof. Dr. K. Kaiser. 2. A. M. 13 Abb. (513.)
Lüftung, Heizung und. Von Ingenieur J. E. Mayer. Mit 40 Abb. (Bd. 241.)
Marx, Karl. Versuch e. Einführung. V. Prof. Dr. R. Wilbrandt. 2. A. (621.)
— s. auch Sozialismus.
Maschinen s. Dampfmaschine, Hebezeuge, Landwirtsch. Maschinenkunde, Wärmekraftmasch., Wasserkraftmasch.
Maschinenelemente. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 3. A. M. 175 Abb. (Bd. 301.)
Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)
Mechanik. V. Prof. Dr. G. Hamel. 3 Bde. I. Grundbegriffe d. M. II. M. der festen Körper. III. M. d. flüss. u. luftförm. Körper. (Bd. 684/686.)
— Aufgaben aus der technischen M. s. d. Schul- u. Selbstunterr. V. Prof. M. Schmitt. M. zahlr. Fig. I. Bewegungsl., Statik. 156 Aufg. u. Lösungen. II. Dynam. 140 A. u. Lös. (Bd. 558/559.)
— siehe Maße und Messen.
Meere, Die, nach d. BdB. Ein Handbüchlein f. Juristen, Mieter u. Vermieter. V. Justizrat Dr. M. Strauß. (194.)
Mikroskop, Das. V. Prof. Dr. W. Scheffer. 2. Aufl. M. 99 Abb. (Bd. 35.)
Milch, Die, und ihre Produkte. Von Dr. A. Reitz. Mit 16 Abb. (Bd. 362.)
Mittelstandsbewegung, Die moderne. Von Dr. S. Müffelmann. (Bd. 417.)
— siehe Konsumgenossen., Wirtschaftl. Org.
Nahrungsmittel s. Abt. V.
Naturwissensch. u. Technik, Am sausenden Webstuhl d. Zeit. Übers. üb. d. Wirken d. Entw. d. N. u. T. a. d. ges. Kulturleb. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. W. Lannhardt. 3. Aufl. Mit 3 Abb. (Bd. 23.)
Nautik. V. Dir. Dr. J. Möller. 2. Aufl. Mit vielen Abb. (Bd. 255.)
Optischen Instrumente, Die. Abbe, Mikrolov, Fernrohr, photogr. Objektiv u. ihnen verw. Instr. Von Prof. Dr. M. v. Rohr. 3. Aufl. M. 89 Abb. (Bd. 88.)
Organisationen, Die wirtschaftlichen. Von Prof. Dr. E. Leberer. (Bd. 428.)
Ostmark, Die. Eine Einführ. i. d. Probleme ihrer Wirtschaftsgesch. Hrsg. von Prof. Dr. W. Mitscherlich. (Bd. 351.)
Patente u. Patentrecht s. Gewerbl. Rechtsch.
Perpetuum mobile, Das. V. Dr. Fr. Ischak. Mit 88 Abb. (Bd. 462.)
Photochemie. Von Prof. Dr. G. Kümmell. 2. Aufl. Mit 23 Abb. i. Text u. auf 1 Tafel. (Bd. 227.)
Photographie, Die, ihre wissenschaftlichen Grundlagen u. i. Anwendung. V. Dr. O. Prelinger. 2. Aufl. Mit Abb. (414.)
— **Die künstlerische Ph.** Ihre Entwicklung, ihre Probleme, ihre Bedeutung. Von Dr. W. Warstat. 2., verb. Aufl. Mit Bildern. (Bd. 410.)
— **Angewandte Liebhaber-Photographie,** ihre Technik und ihr Arbeitsfeld. Von Dr. W. Warstat. Mit Abb. (Bd. 535.)
Physik in Küche und Haus. Von Prof. Dr. H. Speitkamp. M. 51 Abb. (Bd. 478.)
— siehe auch Physik in Abt. V.
Postwesen, Das. Von Oberpostrat H. Sieblist. 2. Aufl. (Bd. 182.)
Rechenmaschinen, Die, und das Maschinenrechnen. Von Reg.-Rat Dipl.-Ing. K. Leuz. Mit 43 Abb. (Bd. 490.)
Recht siehe Erbrecht, Gewerbl. Rechtsschutz, Kaufm. Angest., Kriminalistik, Urheberrecht, Verbrechen, Verfassungsrecht, Zivilprozeßrecht.
— **Rechtsfragen des täglichen Lebens in Familie und Haushalt.** Von Justizrat Dr. M. Strauß. (Bd. 219.)
Rechtsprobleme, Moderne. V. Geh. Justizr. Prof. Dr. J. Kohler. 2. Aufl. (Bd. 128.)
Salzlagerstätten, Die deutschen. Ihr Vorkommen, ihre Entstehung und die Verwertung ihrer Produkte in Industrie und Landwirtschaft. Von Dr. C. Riemann. Mit 27 Abb. (Bd. 407.)
— siehe auch Geologie Abt. V.
Schiffbau siehe Kriegsschiffe.
Schmuckst., Die, u. d. Schmucksteinindustr. V. Dr. A. Eppler. M. 64 Abb. (Bd. 376.)